11



حکومەتی هەرێمی کوردستان- عێراق
وەزارەتی پەروەردە - بەڕێوەبەرایەتی گشتی پرۆگرام و چاپەمەنییەکان

بیرکاری بۆ هەمووان

کتێبی خوێندکار
پۆلی یازدەهەمی ویژەیی

چاپی حەفتەم
٢٠١٥ ز / ٢٧١٥ کوردی / ١٤٣٦ ک

سەرپەرشتی هونەری چاپ
عوسمان پیرداود کواز
ئاری محسن احمد

ناوەڕۆکی کتێبەکە

بەشی 1 — ئامار و ئەگەر — Statistics And Probability — 1

بەشی 2 — نەخشەکان — Functions — 31

بەشی 3 — سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان — Systems Of Linear Equations — 65

ناوەرۆكی كتێبەكە

بەشی 4 سیستمی لاسەنگە هێڵییەكان — Systems of Linear Inequalities 83

بەشی 5 ڕیزكراوەكان — 103 Matrices

بەشی 6 جیاكاری — 119 Differential

ئامار و ئەگەر

Statistics and Probability

دەتوانین ئامار و ئەگەر بەکاربێنین بۆ شیکردنەوەی پێدراوەکانی
کە پەیوەستن بە چاوەڕوانی لە ڕێز و دەرئەنجامکردنی پوختەکانی
پەیوەستن بە ماوەی چاوەڕوانییەکە.



بەشی 1

وانەکان

1. پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق.
2. پێوەرەکانی پەرتبوون.
3. یاساکانی ئەگەر
4. تەکنیکی ژماردن.

دەتوانین ئامار و ئەگەر بەکاربێنین بۆ شیکردنەوەی پێدراوەکانی کە پەیوەستن بە چاوەڕوانی لە ڕێز و دەرئەنجامکردنی پوختەکانی پەیوەستن بە ماوەی چاوەڕوانییەکە.

ماوەی چاوەڕوانی

پێوراو لەسەرەتای ئەو خاڵەوە بریتییە لە 4872 چرکە.

وانەی 1

پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق
Measures of central Tendency



ئامارناسەکان پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق بەکاردێنن بۆ شیکردنەوەی پێدراوەکانی کەلە بوارەکانی زانست و ئابووری و کۆمەڵناسی و بەڕێوە بردن دێنە کایەوە.

لەوەی پێشوو فێربوویت چۆن ناوەندە ژمێرەی و ناوەڕاستە و باو بۆ کۆمەڵە پێدراوەکان بدۆزییەوە پێوانە ئامارییەکان یارمەتیدەرن بۆ وەسفکردنی ڕووە و چەقی کۆمەڵەکە.

بیرهێنانەوە:

- ناوەندە ژمێرەیی **Mean** پێوانەی پوختەی کۆمەڵە پێدراوەکانە کە دەڵێت ناوەندی نمرەکانی خوێندکارانی پۆلی یانزەهەمی وێژەیی لەبیرکاریدا: 70% ئاماژەیە بۆ ئەوی کە ئەو نمرانە بەگشتی گونجاون. [بۆ دۆزینەوەی ناوەندە، سەرجەمی پێدراوەکانی کۆمەڵەکە دابەشبکە بەسەر ژمارەی پێدراوەکان].
- ناوەڕاستە **Median** پێوانەیە بۆ نیشاندانی ناوەندی پێدراوەکانی کۆمەڵەیەك دوای ڕێزکردنیان بەرەو ژوور یان بەرەو ژێر. کە دەڵێت ناوەڕاستەی نمرەکانی خوێندکارانی پۆلی یازدەهەمی وێژەیی لە بیرکاری بریتییە لە 65% ، مانای ئەوەیە ئەو نمرەیە، نمرەکانی خوێندکاران کە وەریانگرتووە بۆ دوو بەشی یەکسان بەشدەکات دوای ڕیزکردنیان بەرە و ژوور یان بەرە و ژێر. [بۆ دۆزینەوەی ناوەڕاستە تەنها ئەوە لەسەر تۆیە پێدراوەکان بەرەو ژوور یان بە رەوژێر ریزبکەی و سەیری ئەو پێدراوە بکەیت کە کەوتۆتە ناوەڕاست. ئەگەر ژمارەی پێدراوەکان تاکبێت، ئەو کاتە یەك پێدراو دەکەوێتە ناوەند پێی دەوترێ ناوەڕاستە. بەڵام ئەگەر ژمارەی پێدراوەکان جووت بێت ئەوا دوو پێدراو دەکەونە ناوەند ئەوکاتە ناوەندی ئە دوو پێدراوە دەبێتە ناوەڕاستی کۆمەڵەکە].
- باو **Mode** پێوانە یە بۆ دیار خستنی ئەو بەهایانەی کە زۆرترین دووبارە بوونەوەیان هەیە لە کۆمەڵە پێدراوەکان بۆ دۆزینەوەی (باو)، خشتەی دووبارەبوونەوە بۆ کۆمەڵە پێدراوەکان دروست بکە، کە لە دوو ڕیز پێکدێت ڕیزی یەکەم پێدراوەکان لەخۆوەدەگرێت بەبێ دووبارە بوونەوە، ڕیزی دووەم لە ژێر هەر پێدراوێك ژمارەی جارەکانی دووبارەبووەتەوە لە خۆدەگرێت [باو بریتییە لەو پێدراوەی کە زۆرترین دووبارەبوونەوەی هەیە].
- بۆ هەر کۆمەڵە پێدراوێك یەك ناوەندە ژمێرەیی یەك ناوەڕاستە هەیە و دەکرێت پتر لەیەك باوی هەبێت، یان باوی هەرنەبێت.

ئامانجەکان

- دۆزینەوەی پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق بۆ کۆمەڵە پێدراوێك.

زاراوەکان
Vocabulary

دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرە و ژوور	Increasing cumulative frequency
دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرە و ژێر.	Decreasing Cumulative frequency
ناوەندە ژمێرەیی	Mean
ناوەڕاستە	Median
باو (مۆد)	Mode

نموونە 1

دۆزینەوەی پێوەرەکانی رووکردنە چەق

ناوەندە ژمێرەی و ناوەڕاستە و باو بۆ ئەم کۆمەڵە پێدراوانە بدۆزەوە. $\{8,2,3,4,2,5,3,4,5,2,3,4\}$

ناوەندە ژمێرەی: $\overline{x} = \frac{8+2+3+4+2+5+3+4+5+2+3+4}{12} = \frac{15}{4} = 3.75$

ناوەڕاستە: پێدراوەکان بەرەو ژوور ڕێزبکە $2,2,2,3,3,\boxed{3,4},4,4,5,5,8$ وادیارە کە ژمارەی پێدراوەکان جووتە ئەو دوو پێدراوە وەربگرە کە دەکەونە ناوەندەکە بریتین لە 4 ، 3 ناوەندیان بدۆزەوە کە دەکاتە $\frac{3+4}{2} = 3.5$ واتا ناوەڕاستەی کۆمەڵەکە دەکاتە 3.5 .

باو: خشتەی دووبارە بوونەوەی پێدراوەکان دروستبکە.

بەها	2	3	4	5	8
دووبارەبوونەوە	3	3	3	2	1

کۆمەڵەکە 3 باوی هەیە ئەمانەن 2 و 3 و 4 .

هەولبدە

ناوەندە ژمێرەیی و ناوەڕاستە و باو بۆ هەریەك لەم کۆمەڵە پێدراوانە بدۆزەوە.

أ $\{6,9,3,8\}$ ب $\{2,5,6,2,6\}$

لەکاتی شیکردنەوەی پێدراوە ئامارییەکان لەکۆبونەوەی چەشندارەکاندا، زۆرجار پێویست بەڕێزکردنی ئەو پێدراوانە دەبێت بەرەو ژوور یان بەرەو ژێر و دیاریکردنی بەشە کۆمەڵەکانیان. ئامارناسەکان بۆ ئەم مەبەستە خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکە بووی بەرەو ژوور یان بەرەو ژێر بەکاردەهێنن.

«خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکە بووی بەرەو ژوور» لە 3 ستون پێکدێت یەکەمیان چەشنەکان لە خۆ دەگرێت کەبەرەو ژوور ڕێزکراون وە دووەمیان بەرامبەر هەر چەشنێك دووبارەبوونەوەکەی لە خۆ دەگرێت بەڵام سێیەمیان سەرجەمی دووبارەبوونەوەی ئەو چەشنە و دووبارەبوونەوەی چەشنەکانی پێشخۆی لە خۆ دەگرێت،

«خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی‌بەرەو ژێر» لە 3 ستون پێکدێت کەیەکەم و دووەمیان وەك دووبارەبوونەوەی کەڵەکە بووی بەرەو ژوور وایە بەڵام ستوونی سێیەم جیاوازی نێوان سەرجەمی دووبارە بوونەوەکان و سەرجەمی دووبارەبوونەوەکانی پێشخۆی لە خۆ دەگرێت.

نموونە 2

دروستکردنی خشتەکانی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبوو.

ئەم خشتەیەی خوارەوە دابەشبوونی ئەندامانی یانەی شەترەنج لە یەکێك لە پارێزگاکان بەپێی تەمەنیان نیشاندەدات. خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژێر و بەرەو ژووری بۆ دروستبکە.

چەشنی تەمەن	[10,12[	[12,14[	[14,16[	[16,18[	[18,20[	[20,22[
دووبارەبوونەوە	30	40	50	60	40	20

أ دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوور

چەشن	دووبارە بوونەوە	دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوور
[10,12[	30	30
[12,14[	40	70
[14,16[	50	120
[16,18[	60	180
[18,20[	40	220
[20,22[	20	240

ب دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژێر

چەشن	دووبارە بوونەوە	دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژێر
[10,12[	30	240
[12,14[	40	210
[14,16[	50	170
[16,18[	60	120
[18,20[	40	60
[20,22[	20	20

خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوور یارمەتیت دەدات بۆ وەڵامدانەوەی ئەو پرسیارانەی وەك ژمارەی ئەو ئەندامانەی کە تەمەنیان لە 20 ساڵ کەمترە چەندە؟ و خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەوژێر یارمەتیت دەدات بۆ وەڵامدانەوەی ئەو پرسیارانەی وەك ژمارەی ئەو ئەندامانەی کە تەمەنی هەریەکەیان لە 20 ساڵ کەمتر نییە؟ نوسینی ئەو دوو خشتەیە وەك ئەو شێوەی خوارەوە یارمەتیت دەدات بۆ وەڵامدانەوەی ئەو جۆرە پرسیارانە.

چەشن	دووبارە بوونەوە	دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوور
کەمتر لە 12	30	30
کەمتر لە 14	40	70
کەمتر لە 16	50	120
کەمتر لە 18	60	180
کەمتر لە 20	40	220
کەمتر لە 22	20	240

چەشن	دووبارە بوونەوە	دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژێر
10یان زیاتر	30	240
12یان زیاتر	40	210
14یان زیاتر	50	170
16یان زیاتر	60	120
18یان زیاتر	40	60
20 یان زیاتر	20	20

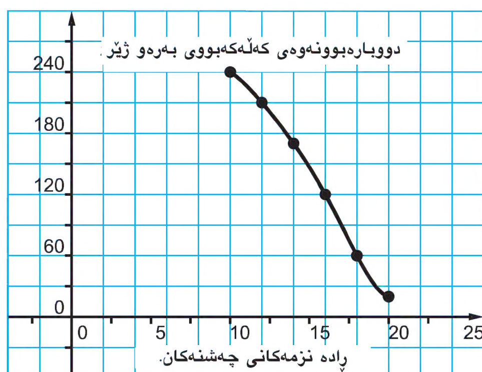
هەوڵبدە خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوور و بەرەو ژێر بۆ ئەم پێدراوە کۆوەبوی چەشندارانەی خوارەوە دروستبکە.

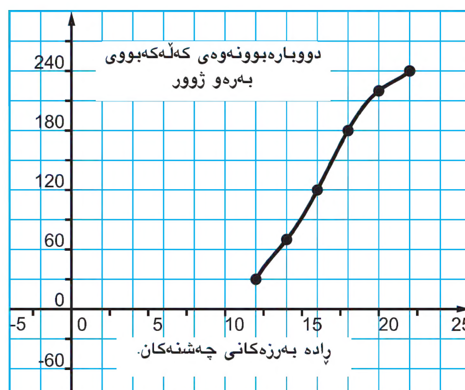
چەشن	[30,40[	[40,50[	[50,60[	[60,70[	[70,80[
دووبارەبوونەوە	5	10	15	12	8

بۆ دۆزینەوەی ناوەندە ژمێرەیی کۆمەڵە پێدراوێکی چەشندار، خشتەیەکی دوو ڕێزی دروستبکە یەکەمیان چەقە چەشنە جیاوازەکان لە خۆبگرێت دووەمیان لە ژێر هەر چەقە چەشنێك ژمارەی دووبارەبوونەوەی چەشنی خۆی لە خۆ دەگرێت لە پاشان ناوەندی ئەو ناوەندە خشتەیەی بەدەستت هێناوە بدۆزەوە.
هەروەها لە پێدراوە چەشنەدارەکان چەشنی یان چەشنەکانی باو دیارییکەکە بریتییە لە و چەشنەی یان ئەو چەشنانەی زۆرترین دووبارە بوونەوەیان هەیە.
بەڵام دیاریکردنی ناوەڕاستەی پێدراوەکانی چەشندار کارێکی ئاسان نییە لەم وانەیەدا فێر دەبێت چۆن بەشێوەی جەبری و روونکردنەوەیی دەیدۆزیەوە.
بۆ دۆزینەوەی ناوەراستە بە روونکردنەوەیی، خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەوژوور بەوێنەی روونکردنەوەی بنوێنە کە پێی دەووترێت چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەوژوور. هەروەها بەنواندنی خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەوژێر بەشێوەی وێنەی روونکردنەوەیی دەوترێت چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەوژێر. ئەو کاتە ناوەڕاستی کۆمەڵە پێدراوەکە دەکاتە پۆوتانی یەکەم بۆ خاڵی یەکتر بڕینی چەماوەکە لەگەڵ ڕاستە هێڵی ئاسۆیی $y = m$ کە m دەکاتە نیوەی گەورەترین دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووەکە.
بۆ دروستکردنی چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەوژوور: تەوەری یەکەم x بۆ بەرزترین ڕادەی چەشنەکان دابنێ و تەوەری دووەم y بۆ دووبارەبوونەوەیان دابنێ. هەرچەشنێك بەخاڵێك دەنوێنرێت کە پۆوتانی یەکەمی بۆ بەرزترین ڕادەی چەشنەکان و پۆوتانی دووەم بۆ دووبارە بوونەوەکەیە. پاشان چەماوەیەکی گونجاو بکێشەو خاڵەکان بەیەك بگەێنە: بۆ دروستکردنی چەماوەیەکی کەڵەکە بووی بەرەوژێر: تەوەری یەکەم x بۆ نزمترین ڕادەی چەشنەکان و تەوەری دووەم y بۆ دووبارەبوونەوەیان دابنێ. بەمەرجێك هەرچەشنێك بەخاڵێك دەنوێنرێت کە پۆوتانی یەکەمی بۆ ڕادە نزمەکانی چەشنەکان و پۆوتانی دووەمی بۆ دووبارەبوونەوەکەی، پاشان بە چەماوەیەکی گونجاو خاڵەکان بەیەك بگەێنە.

نموونە 3

چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەوژووورو بەرەو ژێر بۆ پێدراوەکانی نموونەی 2 بکێشە.





هەوڵبدە چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوور و بەرەو ژێر بکێشە بۆ ئەم پێدراوانەی لەم خشتەیەدا نیشاندراون.

[55,60[	[50,55[	[45,50[	[40,45[	[35,40[	[30,35[	[25,30[	[20,25[	چەشن
5	7	8	12	7	5	4	2	دووبارەبوونەوە

بۆ دیاریکردنی ناوەڕاستەی کۆمەڵە پێدراوێکی چەشنەدار چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەوژوور یان بەرەو ژێر بەکاردێنین بۆ ئەنجامدانی ئەم کارە، ئەم هەنگاوانە ئەنجامبدە.

1. دروستکردنی خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەوژووریان بەرەوژێر.
2. دروستکردنی چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوور یان بەرەو ژێر.
3. دروستکردنی ڕاستەهێڵی $y = m$ کە m دەکاتە نیوەی گەورەترین دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبوو.
4. دیاریکردنی پۆوتانی یەکەم بۆ خاڵی یەکتربڕینی چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژووریان بەرەو ژێرلەگەڵ ڕاستەهێڵەکە.

نموونە 4

دیاریکردنی ناوەڕاستە بە ڕوونکردنەوەیی

ناوەڕاستە بۆ ئەم پێدراوانە بدۆزەوە.

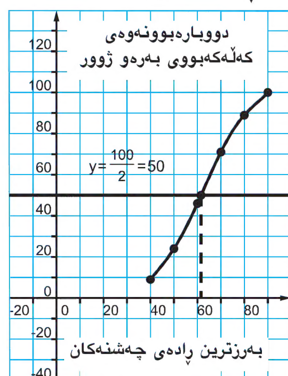
[80,90[	[70,80[	[60,70[	[50,60[	[40,50[	[30,40[	چەشن
11	18	25	22	15	9	دووبارەبوونەوە

خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بە رەوژوور

دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبوو بەرەو ژوور	دووبارەبوونەوە	چەشن
9	9	[30,40[
24	15	[40,50[
46	22	[50,60[
71	25	[60,70[
89	18	[70,80[
100	11	[80,90[

وا دیارە ناوەڕاستە بەنزیکراوەی دەکاتە 61 .

وێنەی ڕوونکردنەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوورو ڕاستەهێڵی $y = m$



هەوڵبدە ناوەڕاستە بۆ ئەم پێدراوانە بدۆزەوە:

[90,100[	[80,90[	[70,80[	[60,70[	[50,60[	[40,50[	چەشن
10	70	100	80	50	30	دووبارەبوونەوە

هەروەها دەتوانیت جەبر بەکاربهێنی بۆ دیاریکردنی ناوڕاستەی کۆمەڵە پێدراوێکی چەشندار، کە هەنگاوەکانی بەم شێوە دەبێت.

1. خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەوژوور دروستبکە.
2. ئەو چەشنە دیارییکەکە نیوەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی‌کۆتایی تێدایە. ئەو چەشنە پێی دەڵێن چەشنی ناوەڕاستە.
3. ئەم یاسایە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ناوەڕاستە. $M=A+\left(\dfrac{\sum\frac{F_t}{2}-F_2}{F_3}\right)\times L$

کاتێك

- A نزمترین ڕادەی چەشنی ناوەڕاستەیە.
- $\sum\frac{F_t}{2}$ گەورەترین دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووە.
- F_2 دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوورە کە ڕاستەوخۆ پێش چەشنی ناوەڕاستە دێت.
- F_3 دوووبارە بوونەوەی چەشنی ناوەڕاستە.
- L درێژی چەشنە. (درێژی چەشنی ناوەڕاستە)

دیاریکردنی ناوەڕاستە بەڕێگای جەبری

نموونە 5 **ناوەڕاستە بۆ پێدراوەکانی نموونەی 4 بدۆزەوە.**

خشتەی دووباربوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوور

دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرە و ژوور	دووبارە بوونەوە	چەشن
9	9	[30,40[
24	15	[40,50[
46	22	[50,60[
71	25	[60,70[
89	18	[70,80[
100	11	[80,90[

نیوەی گەورەترین دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبوو دەکاتە 50 ، ئەمەش سەر بە چەشنی [60,70[. کەواتە، چەشنی ناوەڕستە. بریتییە لە [60,70[
دەزانی کە $A=60$ و $\sum\frac{F_t}{2}=50$ نیوەی گەورەترین دووبارەبوونەوەی کەلەکەبووە،
$F_2=46$ دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژووری ئەو چەشنەیە کە ڕاستەوخۆ پێش چەشنی ناوەراست دێت. $F_3=25$ دووبارەبوونەوەی چەشنی ناوەڕاستەیە، $L=10$.

لەمەوە دەردەچێت کە:

$$M=60+\left(\frac{50-46}{25}\right)\times 10=61.6$$

ئەم ئەنجامە شیاوی وەڵامی نموونەکەی پێشوو دووپات دەکاتەوە (بەنزیکەیی 61) کە بەڕێگای ڕوونکردنەوەیی دیاریکرا.

هەوڵبدە بە ڕێگای جەبری ناوەڕاستە بۆ ئەو پێدراوانەی خوارەوە بدۆزەوە.

[24,27[	[21,24[	[18,21[	[15,18[	[12,15[	چەشن
70	100	80	50	30	دووبارە بوونەوە

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 کام لە هەر سێ پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق بۆ کۆمەڵە پێدراوە چەشندارەکان دیاریکردنیان گرانترە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

2 وادابنێ چەشنی یەکەم و چەشنی کۆتاییت لە نێوان کۆمەڵە پێدراوەکان لابرد، ئایا ناوەڕاستە دەگۆڕێت؟ وەڵامەکەت لێکبدەوە بەنموونە.

3 کۆمەڵە پێدراوێك بنووسە کە چەشندار نەبێت، بەمەرجێك ناوەندە ژمێرەیی و ناوەڕاستەیان یەکسانبێت.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ناوەندە ژمێرەیی و ناوەڕاستە و باو بۆ ئەم کۆمەڵە پێدراوانە بدۆزەوە.

4 $\{5,7,4,7,6,7\}$

5 $\{10,14,18,22,26\}$

6 خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوور و خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژێر بۆ ئەم پێدراوانەی دێت دروستبکە.

چەشن	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[	[40,45[
دووبارە بوونەوە	11	16	19	14	5

7 چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوور و چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژێر بۆ ئەم پێدراوانەی دێت بکێشە.

تەمەن	[8,10[	[10,12[	[12,14[	[14,16[	[16,18[	[18,20[
دووبارە بوونەوە	80	110	100	60	30	20

8 ئەم خشتەیەی خوارەوە نمرەکانی 24 خوێندکاری لە بابەتی بیرکاری لەخۆگرتووە بە وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەهای نزیکەی ناوەڕاستە بدۆزەوە.

چەشن	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[
دووبارە بوونەوە	2	6	3	1	3	5	4

9 بەڕێگای جەبری ناوەندە ژمێرەیی ئەم کۆمەڵە پێدراوانەی دێت بدۆزەوە.

تەمەن	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[	[40,45[
دووبارە بوونەوە	11	16	19	14	5

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ناوەندە ژمێریی و ناوەڕاستە و باو بۆ هەریەك لەم کۆمەڵە پێدراوانەی دێت بدۆزەرەوە.

10 $\{4,16,25,9,36,49\}$

11 $\{5,10,15,20,25\}$

12 خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوور و بەرەو ژێر بۆ ئەم پێدراوانە دروست بکە.

چەشن	[28,30[	[30,32[	[32,34[	[34,36[	[36,38[	[38,40[
دووبارە بوونەوە	2	3	9	12	1	5

13 چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوور و چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژێر بۆ ئەم پێدراوانەی دێن بکێشە.

تەمەن	[30,35[	[35,40[	[40,45[	[45,50[	[50,55[	[55,60[
دووبارە بوونەوە	80	110	100	60	30	20

14 ئەم خشتەیەی خوارەوە تەمەنی 275 کرێکار بەخۆوە دەگرێت لەیەك لە کارگەکاندا بە وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەهای نزیکەیی ناوەڕاستە بدۆزەوە.

تەمەن	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[	[40,45[	[45,50[
ژمارە	45	65	75	44	34	12

15 ئەم خشتەی خوارەوە تێکڕای بەکاربردنی هێلکەیە بۆ یەك کەس لەیەك لە شارەکان لەوەرزی زستاندا بە ڕاپرسی لەسەر 380 کەس، بە ڕێگای جەبری ناوەڕاستە بدۆزەوە.

چەشن	[3,7[	[7,11[	[11,15[	[15,19[	[19,23[
دووبارە بوونەوە	10	100	200	50	20

16 بیری ڕەخنەگر فیربووی کە نرخی نزیکەیی پەسند بۆ ناوەڕاستەی کۆمەڵەیەك پێدراوێکی چەشندارنەبێت، ژمارەیان جووت بێت دوای ڕیزکردنیان بەرەو ژوور یان بەرەو ژێر دەکاتە ناوەندەی دوو پێدراوەکەی ناوەڕاست. ئایا ناوەندەی نزمترین ڕادەی و بەرزترین ڕادەی چەشن دەکاتە نرخی نزیکەیی پەسند بۆ ناوەڕاستەی کۆمەڵە پێدراوەکانی کۆبووی چەشندارەکان؟ بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت پێدراوەکانی نموونەی 5 بەکاربێنە.

17 ئەم خشتەیەی خوارەوە نمرەکانی خوێندکارانی پۆلی یانزدەهەم نیشان دەدات لە تاقیکردنەوەی بیرکاری بۆ وەرزی یەکەم.

80	60	90	20	65	40	60	35	70	35
65	35	70	45	80	65	50	60	15	30
35	15	40	10	20	20	70	55	85	40

أ خشتەی دووبارە بوونەوە دروستبکە بە کۆکردنەوەی پێدراوەکانی خشتەکە لە و چەشنانەی کە درێژی چەشن هەریەکەیان 10 بێت لە نێوانیاندا چەشنی [0,10[هەبێت.

ب خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەوژوور بەرەو ژێر بۆ چەشنەکان دروستبکە.

ج ناوەندە ژمێرەیی ئەو پێدراوانە پێش و دوای کۆەبووەیان بدۆزەوە. بەراورد لە نێوان دوو ناوەندەکە بکە.

د باو یان باوەکانی پێش کۆوەبوی پێدراوەکان دیارییکە و چەشن یان چەشنەکانی باو دوای کۆبۆوە دیارییبکە.

هـ ناوەڕاستی ئەو پێدراوانەی پێش و دوای کۆوەبووەیان بدۆزەرەوە و بەراورد لە نێوان هەردوو ناوەڕاستەکە بکە.

18 ئەمانەی خوارەوە درێژیەکانی خوێندکارانی پۆلی یازدەهەمی وێژەییە بە سانتیمەتر لە یەکێك لە خوێندگاکانی هەرێم.

179; 187; 181; 175; 175; 173; 172; 172; 175; 169; 167; 164; 171
173; 177; 178; 175; 185; 181; 172; 171; 177; 175; 175; 173; 178
168; 172; 174; 182; 178; 167; 168; 172; 174

أ خشتەی دووبارەبوونەوەی کۆوەبووی چەشندار بۆ پێدراوەکان لە چەشنەکان دروستبکە کە درێژی چەشن هەریەکەیان 5cm بێت.

ب خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکە بووی بەرەو ژوور و خشتەی دووبارەبوونەوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژێر بۆ پێدراوە چەشندارەکان دروستبکە.

ج ناوەندە ژمێرەیی بۆ پێدراوەکان پێش و دوای کۆوە بوویان بدۆزەوە، بەراوورد لە نێوان دوو ناوەندەکە بکە.

د باو یان باوەکانی پێدراوەکان دیاریبکەپێش کۆوەبوویان و چەشن یان چەشنەکانی باو دیاریبکە دوای کۆوە بوویان.

هـ ناوەڕاستەی ئەو پێدراوانە پێش و دوای کۆوەبوویان بدۆزەوە و بەراوورد لەنێوان هەردوو ناوەڕاستەکە بکە.



ڕوانین بۆ دواوە

19 ئەم خشتەیەی خوارەوە نمرەکانی خوێندکارانی یەکێك لە پۆلەکان نیشاندەدات لە تاقیکردنەوەی بیرکاری. ئەمانە بدۆزەوە:

أ بەرزترین نمرە

ب نزمترین نمرە

ج ناوەندەی نمرەکان

د ناوەڕاستەی نمرەکان

هـ باوی نمرەکان

85	75	96	88	72
90	78	87	80	98
93	88	82	87	80
83	98	97	84	92



ڕوانین بۆ پێشەوە

20 خشتەی بەرامبەر ئەم خاڵانە نیشاندەدات کە دوو یاریزان تۆماریانکردووە لە تیپی تۆپی باسکە لە 5 یاریدا.

ڕۆشنا	ئاشنا
20	15
20	25
18	30
22	10
20	20

أ ناوەندە ژمێرەیی ژمارەی خاڵەکانی یاریەکە بدۆزەرەوە کە هەریاریزانێك تۆماری کردووە.

ب کام لە دوو یاریزانەکان ئامادە باشیان هەبوو لە تۆمارکردنی خاڵەکان؟ وەڵامەکەت لێکبدەرەوە.
ئایا زانینی ناوەندی خاڵەکانی هەر یاریزانێك لە یاریەکەدا یارمەتیت دەدات بۆ دیاریکردنی ئەو یاریزانەی کە زیاتر ئامادە باشی هەبووە لە تۆمارکردنی خاڵەکان؟ وەڵامەکەت لێکبدەرەوە.

وانەی 2

پێوەرەکانی پەرتبوون

Measures of Dispersion



بۆچی؟

لەوانەی پێشوو فێربوویت کە پێوەرەکانی رووکردنە چەق بۆ کۆمەڵە پێدراوێك وەسفێکیان بەدەستەوە دا. بەڵام ئەو پێوەرانە بەس نییە بۆ وەسفکردنی پێدراوەکان بەتەواوی، بۆیە ئامارناسەکان پەنا دەبەنە بەر پێوەرەکانی تر ئەویش پێوەرەکانی پەرتبوونە.

ئامانجەکان

- دۆزینەوەی پێوەرەکانی پەرتبوون بۆ کۆمەڵە پێدراوێك بەرێگای جەبری و بەکارهێنانی بژمێری روونکردنەوەیی.

زاراوەکان

Vocabulary

لێکنەچوون

Variance

لادانی پێوانەیی

Standard deviation

ئەگەر پێدراوەکانی ئەم دوو کۆمەڵەیە $\{19,20,21\}$ و $\{0,20,40\}$وەربگریت و ناوەندە ژمێرەی و ناوەڕاستەی هەریەکەیان بدۆزیتەوە دەبینیت هەمان ناوەندە ژمێرەیی و ناوەڕاستەیان دەبێت، سەرەڕای ئەوەی جیاوازن: پێدراوەکانی کۆمەڵەی یەکەم لە دەوری ناوەندە ژمێرەیی نزیکدەبنەوەو، بەڵام پێدراوەکانی دووەم دووچاری پەرتبوونێکی گەورە دەبن.

بیر هێنانەوە.

- لێکنەچوون **Varience** پێوەرێکە لە پێوەرەکانی پەرتبوون و هێمادەکرێ بە هێمای σ^2 . لێکنەچوون بریتییە لە ناوەندی دووجاکانی جیاوازی نێوان پێدراوە جیاوازەکان و(x_i) و ناوەندی پێدراوەکانی کۆمەڵەکە $(\bar{x})$ واتا:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2\right)$$

کە n ژمارەی پێدراوەکان دەنوێنێت.

- لادانی پێوانەیی **Standard deviation** پێوەرێکە لە پێوەرەکانی پەرتبوون و هێمای σ بۆ بەکاردێت. لادانی پێوانەیی بریتییەلە ڕەگی دووجای موجەبی لێکنەچوون.
- تا بەهای لادانی پێوانەیی بچووکتر بێت پێدراوەکە پەرتبوونیان کەمترە کە ئەوەدەگەیەنێ هەموویان لەدەوری ناوەند کۆدەبنەوە وای لێدەکات زیاتر دەربڕین لە کۆمەڵەی پێدراوەکان بکات. بەڵام تا بەهای لادانی پێوانەیی گەورەتربێت پێدراوەکان پەرتبوونیان زیاتر دەبێت کە دەبێتە هۆی دوورکەوتنەوەی لەناوەند وای لێدەکات کەمتر دەربڕین لە کۆمەڵەی پێدراوەکان بکات.

نموونە 1

دۆزینەوەی لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بەبەکارهێنانی جەبر.

بەرێگای جەبری لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم کۆمەڵە پێدراوانە بدۆزەوە.

$\{14,13,16,9,3,7,11,12,11,4\}$

شیکار

ئەگەر بۆ پێناسەی لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بگەڕێیتەوە بۆت دەردەکەوێت کە دەبێت ئەم هەنگاوانە ئەنجامبدەی.

1. هەژمارکردنی ناوەندی کۆمەڵەی پێدراوەکان.
2. هەژمارکردنی دووجای جیاوازی نێوان ناوەندی ژمێرەیی و هەر پێدراوێك.

3. هەژماركردنی سەرجەمی دووجاكانی دەستتكەوت و دابەشكردنی بەسەر ژمارەی پێدراوەكان، بۆ بەدەست هێنانی لێكنەچوون.

4. هەژماركردنی ڕەگی دووجای موجەبی لێكنەچووەكان.

دەست بە هەژماركردنی ناوەڕاستە بكە.

$$\bar{x}=\frac{14+13+16+9+3+7+11+12+11+4}{10}=10$$

ئەم خشتە دروستبكە:

پێدراو x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
14	4	16
13	3	9
16	6	36
9	-1	1
3	-7	49
7	-3	9
11	1	1
12	2	4
11	1	1
4	-6	36
سەرجەم		162

لێكنەچوون هەژماربكە: $\sigma^2=\frac{1}{n}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2\right)=\frac{162}{10}=16.2$

لادانی پێوانەیی هەژماربكە: $\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{16.2}\approx 4.025$

هەوڵبدە بەڕێگای جەبری لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی بدۆزەرەوە بۆ ئەم كۆمەڵە پێدراوانە.

$\{0,3,1,1,0,5,1,0,3,0\}$

نموونە 2 «دۆزینەوەی لادانی پێوانەیی و لێكنەچوون بە بەكارهێنانی بژمێری ڕوونكردنەوەیی».

لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم كۆمەڵە پێدراوانە $\{14,13,16,9,3,7,11,12,11,4\}$ بدۆزەوە بەبەكارهێنانی بژمێری ڕوونكردنەوەیی: لە سەرەتادا دەستپێبكە بە بەتاڵكردنی لیستەكان Lists لە بژمێرە ڕوونكردنەوەییەكە:

پەنجەبنێ بە $\boxed{2^{nd}}$ پاشان $\boxed{+}$ شاشەی بەرامبەرت دەست دەكەوێ.

پەنجەبنێ بە $\boxed{4}$ بۆ هەڵبژاردنی بەتاڵكردنی لیستەكان پاشان پەنجەبنێ بە $\boxed{\text{ENTER}}$ و پێدراوەكان تۆماربكە. پەنجەبنێ بە $\boxed{\text{STAT}}$ پاشان $\boxed{\text{ENTER}}$ ئەو شاشەی بەرامبەرت دەستدەكەوێت پێدراوەكان لە لیستی L_1 تۆماربكە یەك لە دوایەك پەنجە بنێ بە $\boxed{\text{ENTER}}$ هەرچەند جار پێدراوێك تۆمار دەكەی پاش تەواوبوون لە تۆماركردنی پێدراوەكان ئەو شاشەی بەرامبەرت دەست دەكەوێت. پەنجە بنێ بە $\boxed{\text{STAT}}$ و CALC هەڵبژێرە پاشان پەنجەبنێ بە $\boxed{\text{ENTER}}$ بۆ هەڵبژاردنی هەژماركردنی یەك لە پێوانەكانی گۆڕانی ئاماری. پەنجە بنێ بە $\boxed{2^{nd}}$ پاشان $\boxed{1}$ بۆ هەڵبژاردنی لیستی L_1 پاشان $\boxed{\text{ENTER}}$ بۆ ئەنجامدانی كرداری هەژماركردن، ئەو شاشەی بەرامبەرت دەستدەكەوێت كە بەهاكانی ناوەندژمێرەی $\bar{x}$ و لادانی پێوانەیی σx تێدا دەردەكەوێت.

هەوڵبدە بژمێری ڕوونكردنەوەیی بەكاربهێنە بۆ دۆزینەوەی لادانی پێوانەیی ئەو كۆمەڵە پێدراوانە $\{0,3,1,1,0,5,1,0,3,0\}$

بۆ دۆزینەوەی لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی كۆمەڵە پێدراوە كۆوەبوی چەشندارەكان ئەم هەنگاوانە ئەنجامبدە :

1. چەقەچەشنی x_i بۆ هەر چەشنێك بدۆزەوەو جارانی دووبارە بوونەوەی چەشنەكەی f_i بكە. سەرجەمی ئەم لێكدانانە بدۆزەوەو ئەنجامەكەی بەسەر سەرجەمی دووبارەبووەكان دابەشبكە بۆ بەدەستهێنانی ناوەندە ژمێرەیی $\bar{x}$.
2. دووجاكانی جیاوازی نێوان ناوەند $\bar{x}$ و چەقی هەر چەشنێك x_i بدۆزەوە.
3. سەرجەمی ئەو دووجایانەی دەستت كەوتووە بدۆزەوە.
4. هەر دووجایەك لە دووبارەبوونەوەی چەشنەكەی بدە پاشان سەرجەمی ئەنجامی لێكدانەكان بدۆزەوە و دابەشی بكە بەسەر سەرجەمی دووبارەبووەكان، لێكنەچوونت دەستدكەوێت.
5. ڕەگی دووجای موجەبی لێكنە چوون بدۆزەوە. لادانی پێوانەییت دەستدەكەوێت.

نموونە 3

دۆزینەوەی لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ كۆمەڵە پێدراوێكی كۆوەبووی چەشندارەكان.

لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم خشتەیەی خوارەوە بدۆزەوە.

چەشن	$[20,22[$	$[22,24[$	$[24,26[$	$[26,28[$	$[28,30[$
دووبارە بوونەوە	5	10	20	10	5

ئەم خشتەیەی خوارەوە دروستبكە و لە پاشان تەواوی بكە:

چەشن	دووبار بونەوە f_i	چەق x_i	$f_i \cdot x_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i-\bar{x})^2$
$[20,22[$	5	21	105	-4	16	80
$[22,24[$	10	23	230	-2	4	40
$[24,26[$	20	25	500	0	0	0
$[26,28[$	10	27	270	2	4	40
$[28,30[$	5	29	145	4	16	80
كۆ	50	كۆ	1250	كۆ		240

ناوەندە ژمێرەی $\bar{x}=\frac{1250}{50}=25$

لێكنەچوون $\sigma^2=\frac{240}{50}=4.8$

لادانی پێوانەیی $\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{4.8}\approx 2.2$

هەوڵبدە لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم خشتەیەی خوارەوە بدۆزەوە

چەشن	$[18,20[$	$[20,22[$	$[22,24[$	$[24,26[$	$[26,28[$
دووبارە بوونەوە	8	12	20	12	8

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیر كاریدا

1 لەبەرچی لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی بەردەوام دوو ژمارەی موجەبن؟

2 چ پەیوەندیەك لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی پێك دەبەستێتەوە؟ ئایا هەردەم لادانی پێوانەیی لە لێكنەچوون بچوكتر دەبێت؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەكراو

لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ هەریەك لەم كۆمەڵە پێدراوانە بە جەبری بدۆزەوە.

3 $\{10,8,6,4,2\}$

4 $\{3,3,4,5,5\}$

5 بژمێری ڕوونكردنەوەیی بەكاربهێنە بۆ دۆزینەوەی لادانی پێوانەیی كۆمەڵە پێدراوەكانی.
$\{4.82, 5.22, 8.32, 3.22, 1.56\}$

6 ئەم خشتەی خوارەوە دابەشكردنی كرێكارەكان نیشاندەدات لەیەكێك لە دەزگاكان بەپێی تەمەنیان. لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم پێدراوانە بدۆزەوە.

تەمەن	[20,22[	[22,24[	[24,26[	[26,28[	[28,30[	[30,32[
دووبارە بوونەوە	5	10	20	10	5	2

ڕاهێنان و جێبەجێكردن

لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ هەر یەك لەم كۆمەڵە پێدراوانە بەجەبری بدۆزەوە.

7 $\{4,4,4,4,5\}$

8 $\{8,12,30,35,48,50,62\}$

9 بژمێری ڕوونكردنەوەیی بەكاربهێنە بۆ دۆزینەوەی لادانی پیوانەیی ئەو كۆمەڵە پێدراوە.
$\{0.33,1.24,2.71,7.42,6.21\}$

10 ئەو خشتەی خوارەوە ئەنجامەكانی ڕاپرسی نیشاندەدات لەسەر نموونەیەك «سامپڵێك» لە مۆسیقاژەنەكان دەربارەی ژمارەی ئەو كاتژمێرانەی كە تایبەتیان كردوە بۆ ڕاهێنانی هەفتانە، لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ پێدراوەكان بدۆزەوە.

چەشن	[1,6[	[6,11[	[11,16[	[16,21[	[21,26[	[26,31[	[31,36[	[36,41[
دووبارە بوونەوە	13	9	9	14	16	8	8	3

11 تۆپی سەبەتە ئالان 13 یاری تۆپی سەبەتەی ئەنجامدا، و ئەم كۆمەڵە خاڵانەی دێت یەك لەدوای یەك بەدەستهێنا: 24، 16، 9، 17، 17، 23، 20، 26، 17، 14، 58، 27، 28. ناوەندە ژمێرەیی و لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی بدۆزەوە.

12 كۆمەڵە پێدراوێك ناوەندە ژمێریان 4، و ناوەڕاستیان 3، و لادانی پێوانەییان 1.6 .

أ. هەر پێدراوێك لە 5 درا. ناوەندە ژمێرەیی كۆمەڵە پێدراوە نوێیەكە چەندە؟ هەروەها ناوەڕاستەیان و لادانی پێوانەییان چەندە؟

ب. 5 بۆ هەر یەك لە پێدراوە سەرەكییەكان (أصلی) زیادكرا. ناوەندی كۆمەڵەی پێدراوەتازەكان و ناوەڕاستەو لادانی پێوانەیان چەندە؟

13 پێوان مامۆستا لە پۆلی چوار داوای لە قوتابییەكانی كردكە بە (سم) درێژی مێزەكانی لەسەری دانیشتون بپێون . مامۆستا پێوانەكانی لە لای خۆی تۆمار كرد كە بەم شێوەیە بوو.
49، 50، 49، 48، 48، 49، 50، 49، 48، 50، 49، 50. ناوەندەو ناوەڕاستەو لادانی پێوانەیی ئەو پێدراوانە بدۆزەوە.

14 ئەگەر لە نێوان کۆمەڵە پێدراوەکان دانەیەك هەبێت کە ماوەی نێوانی لەگەڵ ناوەندە ژمێرەیی کۆمەڵەکە گەورەتربێت لە سێ ئەوەندەی لادانی پێوانەییەکەی، ئامارناسەکان بە و دانەیە دەڵێن بەهای پەڕگر (قیمە متطرفە). پێدراوەکانی ڕاهێنانی پێشوو بەکاربهێنە، و دیاریبکە ئەگەر لەنێوانیاندا بەهای پەڕگەر هەبێت. وەڵامەکەت لێکبدەوە.

ڕوانین بۆ دواوە

15 نەوزاد شەش پاڵووی ژمارەکانی هەڵدا.

أ ئەگەری دەرکەوتنی ژمارەی 3 چەندە؟

ب ئەگەری دەرکەوتنی ژمارەی 8 چەندە؟

ج ئەگەری دەرکەوتنی ژمارەیەك موجەب نەبێت چەندە؟

د ئەگەری دەرکەوتنی ژمارەیەکی جووت چەندە؟

ڕوانین بۆ پێشەوە

16 ئەم خشتەیەی بەرامبەر ژمارەی خوێندکارانی پۆلەکانی دە و یازدە و دوازدە لەیەکێك لە ئامادەییەکان نیشان دەدات.

پۆل	کوڕ	کچ	کۆ
دە	53	51	
یازدە	47	50	
دوازدە	35	44	
سەرجەم			

أ خشتەکە بنووسە و پاشان تەواوییکە.

ب خوێندکارێك هەڵبژێردرا بەهەڕەمەکی ئەگەر چەندە کە خوێندکارەکە پۆلی یازدەبێت؟

ج خوێندکارێك هەڵبژێردرا بەهەڕەمەکی ئەگەر چەندە کە خوێندکارەکە کچ بێت؟

د خوێندکارێك لەپۆلی دوانزە هەڵبژێردرا بەهەڕەمەکی ئەگەری چەندە کە خوێندکارەکە کوڕ بێت؟

هـ خوێندکارێك لەپۆلی دە هەڵبژێردرا بەهەڕەمەکی ئەگەری چەندە کە خوێندکارەکە کچ بێت؟

و خوێندکارێك هەڵبژێردرابە هەڕەمەکی ئەگەر چەندە کە خوێندکارەکە کوڕ بێت یان لە پۆلی دە بێت ؟

وانەی 3

یاساکانی ئەگەر Laws of probability



بۆچی؟

شارەزایان لە کاروباری هەڵبژاردن ئەگەر و پێدراوەکانی پێش خستنی دیموگرافیا و ئەنجامەکانی هەڵبژاردنی پێشوو بەکاردەهێنن، بۆ دارشتنی پێشبینییەکان دەربارەی ئەنجامەکانی خوولی داهاتوو.

لە پۆلەکانی پێشوو چەمکە سەرەتاییەکانی ئەگەر فێربوویت، هەروەها فێربوویت چۆن ئەگەری رووداوێك دەدۆزیتەوە وەك رووداوی دەرکەوتنی ژمارەی 5 لەهەڵدانی بەردەزارێك، لەم وانەیە فێردەبیت کەوا زۆر پەیوەندی هەیە دەتوانێت ژمارەیەك لە روو داوەکان پێکەوە ببەستیتەوە، و دەتوانرێت رووداوی نوێ پێکبهێنرێت. بەدەستپێکردن بە رووداوەکانی تر بەبەکارهێنانی ئامرازی بەیەکتر بەستنی «و» یان ئامرازی بەیەکتربەستنی «یان» وەك رووداوی :«دەرکەوتنی ژمارەی جووت یان دەرکەوتنی ژمارەی بچووکتر لە 3 » کە پێکدێت لە رووداوی «دەرکەوتنی ژمارەی جووت» و رووداوی «دەرکەوتنی ژمارەی بچووکتر لە 3 » بەبەکارهێنانی ئامرازی بەیەکتربەستی «یان». ئەم خشتەی خوارەوە پوختەی چەمکە سەرەکییەکانە کە پێشتر فێریبوویت.

چەمك	روونکردنەوە	نموونە
تاقیکردنەوەی هەرەمەکی experience	کردارێکە پێش بینی ئەنجامەکانی دەکەین، بەڵام ناتوانین بە تەواوی دیاربکەین کامیان رووەدات، بەهەر ئەنجامێکی لە توانادابێت دەووترێت دەرخستە	لەهەڵدانی بەردەزارێك دەزانین ئەنجامەکانی لەتوانادایە بریتییەلە 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 و نازانین کامیان بە دیاردە کەوێت.
بۆشایی نموونەکە Sample space	کۆمەڵەی هەموو ئەنجامەکانی لە توانادایە واتا کۆمەڵەی هەموو دەرخستەکان.	بۆشای نموونەلەکاتی هەڵدانی بەردە زارێك دەکاتەکۆمەڵەی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
رووداو Event	بەشێکە لە بۆشایی نموونەیی. رووداوەکە سادە دەبێت ئەگەر تەنها یەك دەرخستەی هەبێت	دەستکەوتنی ژمارەیەکی تاك لە هەڵدانی بەردەزارێك بریتییە لەرووداوی $\{1, 3, 5\}$. رووداوی $\{5\}$ رووداوێکی سادەیە.
ئەگەر Probability	ئەگەری رووداوێك بریتییە لە ژمارەی P کە پاسادانی $0 \le P \le 1$ دەکات. ئەگەری رووداوی ستەم بریتییەلە $P = 0$ ئەگەری رووداوی دڵنیای $P = 1$ سەرجەمی ئەگەرەکانی رووداوە سادەکانی تاقیکردنەوەیەکی هەرەمەکی دەکاتە 1 .	ئەگەری A رووداوی «دەستکەوتنی ژمارەیەك بچووکتربێت لە 5 » لەهەڵدانی بەردەزارێك ئەوکاتە ئەگەرەکەی بریتییە لە: $p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
یەکسانبوونی ئەگەرەکان Equally likelly	ئەگەرەکانی تاقیکردنەوەیەکی هەرەمەکی یەکسان دەبێت ئەگەر هەموو ئەگەرەکانی رووداوە سادەکان یەکسان بن. واتا چانسی هەموو دەرخستەکان یەکسان بن لەوبارەدا ئەگەری رووداوێك دەکاتە رێژەی ئەنجامەکانی رووداوەکە بۆ ژمارەی هەموو ئەنجامەکانی لە توانادایە	لەهەڵدانی بەردەزارێك تاقیکردنەوەیەکی هەرەمەکی ئەگەرەکانیان یەکسانن ئەگەر A بریتی بێت لە رووداوی دەستکەوتنی ژمارەیەك کەمتربێت لە 5 ئەوا ژمارەی ئەنجامەکان کە پاسادانی رووداوەکە دەکات دەکاتە 4 بەڵام ژمارەی ئەنجامەکانی لە توندایە دەکاتە 6 کەواتە : $p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ئامانجەکان

- بیرهێنانەوەی یاساکانی ئەگەر و بەکارهێنانی.

زاراوەکان

Vocabulary

رووداوە جیاکان Mutually exclusive events

رووداوە سەربەخۆکان Independent events

تەواوکەری رووداو Complement of an event

دەرخستە Outcome

ئەگەر A و B دوو ڕووداو بن لە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی دەتوانی پێناسەی ڕووداوەکانی تر بکەیت بەپێکهاتنی ئەم دوو ڕووداوە.

ڕووداوی $A \cup B$ « بە A یان B بخوێنەوە» بریتییە لەو ڕووداوەی کەپێکهاتووە لەهەموو دانەکانی ڕووداوی A و دانەکانی ڕووداوی B ، ئەگەر $A = \{2, 4, 6\}$ ڕووداوی « دەرکەوتنی ژمارە جووتبێت» وە $B = \{3\}$ ڕووداوی «دەرکەوتنی ژمارەی 3 بێت» ئەو کاتە ڕووداوی $A \cup B$ دەبێتە $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$ وە ڕووداوی $A \cap B$ (بە A و B بخوێنەوە) بریتییە لەو ڕووداوەی کە پێکدێت لە هەموو دانە هاوبەشەکانی نێوان ڕووداوی A و ڕووداوی B . ئەگەر هاتوو $A = \{2, 4, 6\}$ ڕووداوی « دەرکەوتنی ژمارەی جووتبێت» و $B = \{1, 2\}$ ڕووداوی « دەرکەوتنی ژمارەی بچووکتر لە 3 ». ئەو کاتە ڕووداوی $A \cap B$ دەبێتە $A \cap B = \{2\}$.

نموونە 1

دۆزینەوەی ڕووداوەئاوێتەکان.

لەتاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی پێویستیکرد بەردەزارێك هەڵبدرێت، ڕووداوی $A \cup B$ و ڕووداوی $A \cap B$ بدۆزەوە، کە A ڕووداوی « دەرکەوتنی ژمارەی تاکە» وە ڕووداوی B « دەرکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 1 » بێت.

ڕووداوی A بریتییە لە $A = \{1, 3, 5\}$ و ڕووداوی B بریتییە لە $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

ڕووداوی $A \cup B$ بریتییەلە $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، واتە ڕووداوەکە دڵنیاییە، و ڕووداوی $A \cap B$ بریتییە لە $A \cap B = \{3, 5\}$.

هەوڵبدە

لەتاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی پێویستیکرد یەك گۆ ڕابکێشرێت لە تورەگەیەك کە 10 گۆی ڕەنووسکراوی لە 1 تا 10 تێدایە. ڕووداوی $A \cup B$ و ڕووداوی $A \cap B$ بدۆزەوە کاتێ A ڕووداوی « دەرکەوتنی ژمارەی تاکە » و B ڕووداوی «دەرکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 9 » بێت.

ئەگەری $A \cup B$

ئەگەر A و B دوو ڕووداوی جیابن ئەوا

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ئەگەر A و B دوو ڕووداوی جیا نەبن ئەوا

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

نموونە 2

دۆزینەوەی ئەگەری ڕووداوەئاوێتەکراوەکان.

پێویستیکرد لە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی بەردە زارێك هەڵبدرێت.

أ ئەگەری ڕووداوی $A \cup B$ و ئەگەری ڕووداوی $A \cap B$ بدۆزەوە، کە A بریتییە. لە ڕووداوی «دەرکەوتنی ژمارەی تاك» و B بریتییە لە ڕووداوی « دەرکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 1 ».

ڕووداوی A بریتییە لە $A = \{1, 3, 5\}$ و ڕووداوی B بریتییە لە $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ لەوەوە دەردەکەوێت: $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ؛ $p(B) = \frac{5}{6}$.

لەلایەکی ترەوە، ڕووداوی $A \cap B$ بریتییە لە $A \cap B = \{3, 5\}$ لەوەدەردەکەوێت $p(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

بەمجۆرە

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

بۆ ساغکردنەوەی ئەنجامەکە تێبینی دەکەین کە ڕووداوی $A \cup B$ بریتیە لە $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ واتا ڕووداوەکە دڵنیاییە و لەمەش $P(A \cup B) = 1$.

ب ئەگەری ڕووداوی $A\cup B$ و ئەگەری ڕووداوی$A\cap B$ بدۆزەوە، کاتێك A بریتییە لە ڕووداوی «دەرکەوتنی ژمارەی جووت» و B بریتییە لە ڕووداوی (دەرکەوتنی ژمارەی بچووکتر لە 2)

ڕووداوی A بریتییە لە$A=\{2,4,6\}$ و ڕووداوی B بریتییە لە $B=\{1\}$لەوەوە دەردەکەوێت کە:
$p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ و $p(B)=\frac{1}{6}$.

لەلایەکی ترەوە ڕووداوی$A\cap B$ بریتییە لە$A\cap B=\{\ \}=\varnothing$ واتا دوو ڕووداوەکە جیان:
لەوەوە دەردەکەوێت کە : $p(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

بۆ پاسادانکردنی وەڵامەکە، تێبینی دەکەین کە ڕووداوی$A\cup B$ بریتییە لە$A\cup B=\{1, 2, 4, 6\}$
لە دواییدا $p(A\cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

هەوڵبدە

لە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی پێویستیکرد یەك گۆ ڕابکێشرێت لە تووڕەگەیەك کە 7 گۆی ڕەنووسکراوی لە 1 تا 7 ی تێدایە.

أ ئەگەری ڕووداوی$A\cup B$ ، و ئەگەری ڕووداوی $A\cap B$ بدۆزەوە، کە A ڕووداوی «دەستکەوتنی ژمارەی جووت بێت » و B «ڕووداوی دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 3 » بێت.

ب ئەگەری ڕووداوی$A\cup B$ ، و ئەگەری ڕووداوی $A\cap B$ بدۆزەوە، کە A ڕووداوی «دەستکەوتنی ژمارەی جووت» و B ڕووداوی « دەستکەوتنی ژمارەی گەورەترلە 6 » بێت.

ئەگەر A و B دوو ڕووداوی جیابن، ئەو کاتە هەردووکیان پێکەوە نایەنە دی، چونکە هاتنە دی یەکێکیان دەبێتەهۆی نەهاتنەدی ئەویتریان لەهەمان کاتدا؟ ئایا نەهاتنەدی یەکەکیان مەرجە ئەوی تریان بێتەدی؟ لەوانەیە وابێت و لەوانەیە وانەبێت. ئەگەر A ڕووداوی «دەرکەوتنی ژمارەی جووت» بێت لە هەڵدانی بەردەزارێك و B ڕووداوی «دەرکەوتنی ژمارەی 3 » بێت ئەوا نەهاتنەدی یەکێکیان مەرج نییە ئەویتریان بێتە دی، چونکە دەرکەوتنی 5 هیچ یەکەیان نایەتەدی. بە پێچەوانەی ئەوەوە، ئەگەر A ڕووداوی «دەستکەوتنی ڕووی خەت» بێت لە هەڵدانی پارچە دراوێکی کانزایی و ڕووداوی B «دەسکەوتنی ڕووی شێر» بێت، ئەوا نەهاتنە دی یەکێکیان مەرجە ئەوەکەی تریان بێتەدی، واتا دوو ڕووداوەکە پاسادانی $A\cap B$ کە ڕووداوی ئەستەمە و $A\cup B$ ڕووداوی دڵنیاییە دەکەن.

لەوبارەدا بە ڕوودای B دەووترێت تەواوکەری ڕووداوی A .

هێمای$\overline{A}$ بەکاربهێنە بۆ مەبەستی تەواوکەری ڕووداوی A . ئەمەی دێت تێبینی بکە:

ئەگەر B تەواوکەری A بێت ئەوا A تەواوکەری B دەبێت.

نموونە 3 **دۆزینەوەی ڕووداوی تەواوکەر**

ڕووداوی تەواوکەر لە هەر بارێك بدۆزەوە

أ لەتاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی پێویستیکرد بە هەڵدانی پارچە دراوێکی کانزایی دووجار لە دواییەك. A ڕووداوی «دەستکەوتنی شێرە یەکجار بەلایەنی زۆرەوە».

ب لەتاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی پێویستیکرد بە هەڵبژاردنی نوێنەری پۆلی یانزەهەمی وێژەیی بە ڕێگای دەنگدان ڕووداوی A (هەڵبژاردنی کچە)

شیکار

أ بۆشایی نموونەیی ئەمەیە: $\{(T, T), (T, I), (I, T), (I, I)\}$ کاتێ I شێربێت T خەت بێت.
ڕووداوی A دەکاتە $\{(T, T), (T, I), (I, T)\}$
لەمەوە دەردەچێت $\overline{A}=\{(I, I)\}$. واتا دەستکەوتنی شێر دووجار.

ب ڕووداوی تەواوکەر بریتییە لە ڕووداوی (هەڵبژاردنی کوڕ)

هەوڵبدە ڕووداوی تەواوکەر بۆ هەریەك لەمانەی دێت بدۆزەوە

أ لەتاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی پێویستیکرد بەردە زارێك هەڵبدرێت، ڕووداوی A بریتییە لە «دەستکەوتنی ژمارەی تاك».

ب لەتاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی پێویستیکرد بە هەڵدانی پارچە دراوێکی کانزایی 3 جار لە دوابیەك. ڕووداوی A بریتییە لە (دەستکەوتنی بەلایەنی کەمەوە ڕوویەك شێر بێت)

ئەگەری ڕووداوی تەواوکەر

بۆ هەژمارکردنی ئەگەری تەواوکەری ڕووداوی A ئەم ڕێسایە بەکاربهێنە:

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)$$

نموونە 4 **دۆزینەوەی ڕووداوی تەواوکەر**

لە یەکێك لە ئامادەییەکان سێ جۆرە تیپ هەیە: تیپی شانۆ لە 32 ئەندام پێکهاتووە و تیپی بیرکاری لە 33 ئەندام پێکهاتووە و تیپی تۆپی بالە لە 39 ئەندام پێکهاتووە، هەندی لە خوێندکاران سەر بە تیپێك زیاترن هەروەك لەم هێڵکارییەی بەرامبەر ڕوونکراوەتەوە. بەڕێوەبەر یەکێك لە ئەندامەکانی تیپەکانی بەشێوەیەکی هەڕەمەکی هەڵبژارد بۆ نوێنەرایەتی کردنی خوێندنگا لە کۆبوونەوەیەك کە لە بەڕێوەبەرایەتی پەروەردە ئەنجامدەدرێت. ئەگەری ئەندام بوونی خوێندکارەکە بەلایەنی کەم لە دوو تیپ چەندە؟

ئەگەر ڕووداوی A «بەلایەنی کەمەوە ئەندام بێت لەدوو تیپ» ئەوا ڕووداوی تەواوکەر $\overline{A}$ بریتییەلە « ئەندام تەنیا لە یەك تیپ». دانەکانی بۆشایی نموونەکە 60 دانەیە.

(ژمارەی ئەندامانی هەرسێ تیپەکە $60 = 6+7+8+8+11+10+10$).

ژمارەی دەرخستەکانی ڕووداوی تەواوکەر بریتییە لە $24 = 6+8+10$لەوەوە. $P\left(\overline{A}\right)=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$

و $P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}=0.60=60\%$

هەوڵبدە ئەگەر چەندە ئەو نوێنەرەی کە هەڵبژێردرا تەنها لە دوو تیپ ئەندام بێت؟

ئەگەر A و B دوو ڕووداوبن لە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی، لەوانەیە هاتنەدی یەکێکیان کاربکاتە سەر هاتنە دی ئەوی تریان و لەوانەیە کار نەکاتەسەری، ئەگەر هاتوو توورەگەیەکت هەبوو کە 5 گۆی سوور و 3 گۆی شینی تێدابێت و تاقیکردنەوەکەش بریتیبوو لە ڕاکێشانی دوو گۆ یەك لەدوای یەك، ئەوا ئەگەری گۆی دووەم سوور بێت جیاوازدەبێت لە نێوان گەڕانەوەی گۆی یەکەم بۆ ناو توورەگەکە و نەگەڕاندنەوەی بۆ ناو توورەگەکە. با A ڕووداوی (گۆی یەکەمی سوور بێت) و B ڕووداوی (گۆی دووەمی سور بێت). گەڕانەوەی گۆی یەکەم بۆ ناو تورەگەکە پێش ڕاکێشانی گۆی دووەم ئەو کاتە ڕووداوی یەکەم کارناکاتە سەر ئەگەری ڕووداوی B کە دەکاتە $\frac{5}{8}$ ، بەڵام ئەگەر گۆی یەکەم نەگەڕێنرێتەوە بۆ ناوتورەگەکە پێش ڕاکێشانی گۆی دووەم ئەوا ئەگەری B دەکاتە $\frac{5}{7}$.

بە دووڕووداوی A و B دەووترێت سەربەخۆن ئەگەر هاتنەدی یان نەهاتنەدی یەکێکیان کار نەکاتە سەر ئەگەری هاتنەدی ئەوەکەی تریان.

ئەگەری ڕووداوە سەربەخۆکان

ئەگەر A و B دوو ڕووداوی سەربخۆبن ئەوا :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

نموونە 5

دۆزینەوەی ئەگەری ڕووداوە سەربەخۆکان

لە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی پێویستیکرد بە ڕاکێشانی دوو گۆ یەك لەدوای یەك لە تورەکەیەك کە 9 گۆی سوور 3 گۆی سەوزی تێدایە ئەگەری چەندە کە دوو گۆیەکە سووربن. وادابنێ گۆی یەکەم دەخرێتەوە ناو توورەگەکە پێش ڕاکێشانی گۆی دووەم.

گۆی یەکەم خراوەتەوە ناو توورەگەکە پێش ڕاکێشانی گۆی دووەم: دوو ڕووداوەکە لەو بارەدا، سەربەخۆن.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

چونکە $P(A) = P(B) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

هەوڵبدە ئاکار تورەکەیەکی لایەکە 6 گۆی سوور و 4 گۆی شینی تێدایە و برایەکەی توورەگەیەکی لایە دوو گۆی زەرد و یەك گۆی سوور و 5 گۆی ڕەشی تێدایە. هەریەکەیان گۆیەکی لە توورەگەکەی خۆی ڕاکێشا ئەگەری سوور بوونی دوو گۆیە ڕاکێشراوەکە چەندە؟

نموونە 6

دۆزینەوەی ئەگەری ڕووداوە سەربەخۆکان

لە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی پێویستیکرد بە هەڵدانی بەردەزارێك 3 جار یەك لەدوای یەك. ئەگەری دەستکەوتنی ژمارەی جووت لەهەر جارێك چەندە؟

A ڕووداوی «دەستکەوتنی ژمارەی جووت لە جاری یەکەم» و B ڕووداوی «دەستکەوتنی ژمارەی جووت لە جاری دووەم» و C ڕووداوی « دەستکەوتنی ژمارەی جووت لە جاری سێیەم» ڕووداوەکان سەربەخۆن، و ئەگەری هەریەکەیان یەکسانە بە $\frac{1}{2}$. لەوەوە دردەچێت

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

هەوڵبدە لە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی پێویستیکرد بە هەڵدانی پارچە دراوێکی کانزایی 4 جار یەك لەدوای یەك، ئەگەری دەستکەوتنی شێر لە هەر جارێکدا چەندە؟

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. کام لە دوو ڕێساکەی هەژمارکردنی ئەگەری ڕووداوی $A \cup B$ لە هەموو بارێکدا ڕاستە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

2. چۆن ساغی دەکەیتەوەکە دوو ڕووداوی A و B سەربەخۆن ئەگەر، ئەگەری هەریەکەیان و ئەگەری $A \cap B$ زانرابن.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

3. لەتاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی پێویستیکرد بەهەڵدانی بەردەزارێك. $A \cup B$ و $A \cap B$ بدۆزەوە کاتێ A بریتییە لە ڕووداوی دەستکەوتنی ژمارەیەك کەمتر لە 5 و B بریتییە لە ڕووداوی دەستکەوتنی ژمارەیەك لە 3 کەمتر نەبێت.

4 لە ڕاپرسییەکدا دەربارەی نوێکردنەوەی شێوازە پەروەردەییەکان، بۆچوونی 100 لەوانەی لەبواری پەروەردەدا کاردەکەن وەرگیرا. ئەم خشتەیەی بەرامبەر ئەنجامی ئەم ڕاپرسییە ڕووندەکاتەوە، خشتەکە بنووسە و تەواوی بکە ئەگەر یەکێك لەوانە ڕاپرسیەکەیان ئاراستە کرابوو بەهەڕەمەکی هەڵبژێردا. ئەگەری ئەوەی ئەو هاوڵاتییەی دژی نوێخوازی بێت یان هیچ ڕایەکی نەبێت چەندە؟

	نێر	مێ	سەرجەم
لەگەڵ	18	9	
دژ	12	25	
بێ ڕا	20	16	
سەرجەم			

5 لە تاقیکردنەوە هەڕەمەکییەکەی پرسیارەکەی پێشوو، ڕووداوی تەواوکەری ڕووداوی «هەڵبژاردنی یەکێك لەوانەی ڕاپرسییەکەیان ئاراستەکرابوو لەوانەبێ کە ڕای داوە» بدۆزەوە .

6 ڕووداوی تەواوکەر بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئەگەری ئەو هاوڵاتییەی کە بەشداری کردووە لە ڕاپرسیەکە ڕای دابێت.

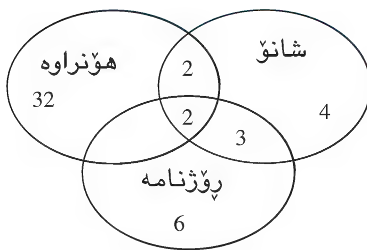
7 لەتاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی پێویستیکرد بە خولاندنەوەی چەرخی میلداری بەرامبەر دوو جار یەك لەدواییەك ئەگەری دەستکەوتنی ژمارەی 4 لەهەردوو جاردا چەندە؟



8 لەتاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی پێویستیکرد بە خولاندنەوەی چەرخی میلدار سێ جار یەك لەدوای یەك ئەگەری دەستکەوتنی ڕەنگی سوور پاشان سەوز دیسان ڕەنگی سوور چەندە؟

پرسیار و جێبەجێکردن

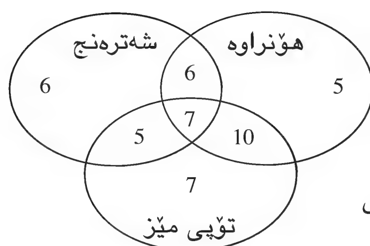
9 لە یەکێك لە ئامادەییەکان سێ تیپ بۆ چالاکییەکانی دەرەوەی پۆل هەیە، تیپی هۆنراوە 36 ئەندام و تیپی شانۆ 11 ئەندام و تیپی ڕۆژنامەگەری 11 ئەندام لەخۆ دەگرن. هەندێك لە خوێندکارەکان سەربە تیپێك زیاترن وەك ئەم هێڵکارییەی بەرامبەر ڕوونی دەکاتەوە، یەك لە ئەندامەکانی تیپەکان بەشێوەی هەڕەمەکی هەڵبژێردرا، ئەگەری ئەو ئەندامە سەر بە دوو تیپ بێت چەندە؟



10 هەڤاڵ خوێندکارێکی پۆلی یازدەهەمی وێژەییە لە هۆبەی A کە 18 خوێندکاری تێدایە و خوشکەکەی لە هۆبەی B کە 20 خوێندکار بە خۆ دەگرێت،دەستکرا بەهەڵبژاردنی نوێنەر بۆ هەر هۆبەیەك بەرێگای دەنگدان، ئەگەر چەندە کە هەڤاڵ وخوشکەکەی نوێنەری هۆبەکانیان بن؟

11 ئەگەری دەستکەوتنی خەت پاشان شێر ئینجا شێر لە هەڵدانی پارچە دراوێکی کانزایی 3 جار یەك لەدوای یەك چەندە؟

12 لە یەكێك لە كۆمەڵە ڕۆشنبیرییەكان سێ تیپ هەیە. تیپی شەترەنج 24 ئەندام و تیپی تۆپی سەرمێز 29 ئەندام و تیپی هۆنراوە 28 ئەندام لەخۆ دەگرن، هەندێ لە ئەندامان سەربە تیپێك زیاترن هەروەك لەم هێڵكارییەی بەرامبەر ڕوونكراوەتەوە، ئەگەری هەڵبژاردنی ئەندامێك بەهەرەمەكی كە بەلایەنی زۆر سەربە دوو تیپ بێت چەندە؟



13 ڕووداوەكان A و B و C سەربەخۆن و ئەگەرەكانیان بریتییە لە: $P(A)=0.5$ ، $P(B)=0.25$ ، $P(C)=0.75$ ئەم ئەگەرانەی دێن بدۆزەوە. أ $P(A\cap B)$ ، ب $P(A\cap C)$ ، ج $P(A\cup B)$.

لە پرسیاری 14 تا 16، دیاریبكە ئەگەر دوو ڕووداوی A و B سەربەخۆن یان نا؟ و ئەگەری $A\cap B$ هەژماربكە.

14 تاقیكردنەوەی هەڕەمەكی: هەڵدانی بەردەزار. ڕووداوی A : (دەستكەوتنی ژمارەی جووت) ڕووداوی B : «دەستكەوتنی ژمارەی 2 یان 4 ».

15 تاقیكردنەوەی هەڕەمەكی: هەڵدانی بەردەزار. ڕووداوی A : (دەستكەوتنی ژمارەی 6) ڕووداوی B : «دەستكەوتنی ژمارەی بچوكتر لە 5 ».

16 تاقیكردنەوەی هەڕەمەكی: هەڵدانی بەردەزار. ڕووداوی A : (دەستكەوتنی ژمارەی 4) ڕووداوی B : «دەستكەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 3 ».

17 **فڕۆكەوانی** ئامارەكانی یەكێك لە كۆمپانیاكانی فڕۆكەوانی پێشانی دەدات ئەگەری گەشتەكەیان لە تاران بۆ هەولێر كە لەكاتی خۆیدا دەگات لە 92% ی گەشتەكانە، و گەشتەكەیان كە لە هەولێرەوە بۆ عەممان دەردەچێت كە لەكاتی خۆیدا دەگات لە 97% ی گەشتەكانە، كرمانج ویستی گەشتێك بكات لە تارانەوە بۆ عەممان بە هەولێردا بڕوات. ئەگەری چەندە بۆ گەیشتنی ئەو فڕۆكەیەی كە دەیگوازێتەوە بۆ هەولێر لە كاتی خۆیدا، و دەرچوونی بەرەو عەممان لە كاتی خۆیدا؟

18 ئەگەری ئامادەبوونی كامەران لە ئاهەنگێكدا 80% و ئەگەری ئامادەبوونی كاروان 95% . ئەگەری ئامادە بوونیان لە ئاهەنگەكەدا پێكەوە چەندە ئەگەر بزانیت ئامادەبوونی یەكێكیان كارناكاتە سەر ئامادەبوونی ئەویتریان؟

19 تورەگەیەك 15 گۆی ڕەنووسكراوی لە 1 تا 15 ی تێدایە، ڤیان گۆیەكی ڕاكێشا لە پاشاندا گۆیە ڕاكێشراوەكەی خستە وە ناوتوورەگەكە پێش ڕاكێشانی گۆیەكی تر لە جاری دووەم.

أ ئەگەر چەندە كە هەردوو گۆیەكە ژمارەی 8 ی لەسەربێت؟

ب ئەگەر چەندە كە ڤیان تەنها یەك جار ئەو گۆیە ڕابكێشێت كە ژمارەی 8 ی لەسەربێت؟

20 لە تاقیكردنەوەیەكی هەڕەمەكی پێویستیكرد دوو بەردەزار هەڵبدرێت یەكیان سوور و ئەوی تریان شین. ڕووداوی A بریتییە لە ڕووداوی «دەركەوتنی ژمارە 1 لەبەردەزاری سوور»و B بریتییە لەڕووداوی«دەركەوتنی سەرجەمی ژمارەی دوو ڕووەكە كەمتربێت لە 4».

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

أ $P(A)$ و $P(B)$ بدۆزەوە.

ب ئەو ئەنجامانە بنووسە كە پاسادانی ڕووداوی $A\cap B$ دەكەن و ئەگەری ئەو ڕووداوە دەربهێنە.

ج وەڵامی دوو پرسیارەكەی پێشوو بەكاربهێنە بۆ بڕیاردان ئەگەر دوو ڕووداوەكە سەربەخۆن یان نا.

21 پێنج قوتابی هاتنە ناو شانۆی قوتابخانە، هەریەکەیان ڕێزێکیان هەڵبژارد بۆ دانیشتن لە دە ڕێزی کورسییەکانی شانۆ. ئەگەری چەندە کە بەلایەنی کەمەوە دوو قوتابی هەمان ڕیز هەڵبژێرن.

22 **بیری ڕەخنەگر:** ئەگەر A و B دو ڕووداوی سەربەخۆبن ئایا دوو ڕووداوی تەواوکەری: $\overline{A}$ و $\overline{B}$ سەربەخۆ دەبن؟ وەڵامەکەت لێکبدەوە.

23 **بنووسە** دوو ڕێگە بهێنەوە بۆ دۆزینەوەی ئەگەری دەستکەوتنی بەلایەنی کەم ڕوویێکی خەت لەکاتی هەڵدانی پارچە دراوێکی کانزایی دووجار لە دوای یەکتر.

24 پارچە پارەیەکی کانزایی بە جۆرێك دروستکراوە ئەگەری دەرکەوتنی ڕووی شێر دوو ئەوەندەی ئەگەری دەرکەوتنی ڕووی خەت بێت لەهەر هەڵدانێکدا، ئەگەری هەریەکە لە ڕووی شێرو خەت بدۆزەوە.

ڕوانین بۆ دواوە

25 شیرین لە ماوەی 10 هەفتەدا ناوەندی ژمارەی کیلۆمەترەکانی تۆمارکرد کە ئۆتۆمبێلەکەی بڕیویەتی بۆ هەر گالۆنێك، بەم شێوە بوو: 18 ، 17 ، 19، 18 ، 18، 25 ، 29 ، 30 ، 26 ، 19

أ) ناوەند و ناوەڕاستە و باو بۆ پێدراوەکان بدۆزەوە.

ب) گەورەترین بەهاو بچووکترین بەهاو مەودا بدۆزەوە.

ج) لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بدۆزەوە.

د) ئەو پێدراوانە چین کە لە ناوەندە ژمێرەیی دوورترە زیاتر لە لادانی پێوانەییەك؟

ڕوانین بۆ پێشەوە

26 نموونەیەك لە شوفێرەکان کە 3510 کەس لەخۆ دەگرێت لە نێوانیاندا 1950 پیاو کە 103 کەسیان تووشی ڕەنگ کوێری بوون. تەنها 6 کەس لەوانەی تووشی ڕەنگ کوێری بوون ئافرەتن. ئەگەری ئەو کەسەی کە بە هەڕەمەکی هەڵبژێردراوە لە پیاوەکان بێت یان لە تووشبوانی ڕەنگ کوێری بێت چەندە؟

تەکنیکی ژماردن Counting techniques



بۆچی؟

شیرین تەکنیکی ژماردن بەکاردەهێنێ بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ڕێگاکانی نیشاندانی ئەو تابلۆیانەی کەوێنەی کردوون.

فێربوویت کە هەژمارکردنی ئەگەری هاتنەدی ڕووداوێك لە تاقیکردنەوەی هەڕەمەکی یەکسان لە ئەگەرەکان بریتییە لە دابەشکردنی ژمارەی دەرختستنەکانی هاتنەدی ڕووداوەکە بەسەر ژمارەی گشت دەرخستەکان. لێرەدا پێویستی تەکنیکی ژماردن سەری هەڵدا کە یارمەتیت دەدا بۆ دۆزینەوەی ئەم جۆرە ژمارانە.

ئەم خشتەیەی خوارەوە کورتەی هەندێك لە تەکنیکی ژماردنە کە پێشتر فێربوویت.

تەکنیك	ڕوونکردنەوەکەی	نموونە
یاسای بنەڕەتی ژماردن **Fundamental counting principle**	دەقی ئەو یاسایە بریتییە لە: ئەگەر m ڕێگا هەبێ بۆ هڵبژاردنی یەکەم و n ڕێگا بۆ هەڵبژاردنی دووەم ، ئەوا بۆ هەڵبژاردنیان پێکەوە $m \times n$ ڕێگا هەیە.	ژەمێکی نانخواردن پێکدێت لە قاپێکی زەڵاتە و قاپێکی سەرەکی، ئەگەر ژمارەی قاپەکانی زەڵاتە پێنج بێت و ژمارەی قاپەکانی سەرەکی 3 بێت. دەتوانیت ژەمەکەت بە $3 \times 5 = 15$ ڕێگا هەڵبژێریت
لێدراوی n **factorial n**	ئەگەر n ژمارەیەکی تەواوی سالیب نەبێت، ئەوا لێدراوی n دەکاتە: $n! = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 1\times2\times\ldots\times n & n>0 \end{cases}$	$3! = 3 \times 2 \times 1$ $0! = 1$
گۆڕینەکان **Permutations**	گۆڕینی nشت بریتییە لە دانانیان لە ڕێزکردنێکی دیاریکراو. ژمارەی گۆڕینەکانی n شت بریتییە لە لێدراوی n واتا $n!$.	گۆڕینی پیتەکانی A, B, C بریتییە لە: ABC, BCA, CAB ACB, CBA, BAC کە ژمارەیان $3! = 6$
ڕیزکردنەکان **Arrangements**	ڕێزکردنی r شت لە بنچینەی n بریتییە لە هەڵبژاردنی r شت لە شتەکانی n بەڕێزکردنێکی دیاریکراو، ژمارەی ڕێزکردنەکانی r شت لە بنچینەی n بریتییە لە. ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	AB و BA دووریزکردنی جیاوازان بۆ دوو پیت لە بنچینەی سێ پیتی A, B, C ژمارەی ڕێزکردنەکانی دوو پیت لە بنچینەی 3 بریتییە لە ${}_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$
گونجێنەکان **Combinations**	گونجێنی r شت لە بنچینەی n بریتییە لە هەڵبژاردنی r شت لەشتەکانی n بەبێ وەستان لە ڕێزکردن. ژمارەی گونجێنەکانی r شت لە بنچینەی n شت بریتییە لە. ${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	$\{A,B\}$ بریتییە لە گونجێنی دوو پیت لە بنچینەی سێ پیتی A, B, C ژمارەی گونجێنەکانی دوو پیت لە بنچینەی 3 بریتییە لە. ${}_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

وانەی 4

ئامانجەکان

- تەکنیکی ژماردن بەکاردەهێنێ بۆ هەژمارکردنی ئەگەرەکان.

زاراوەکان

Vocabulary

گۆڕینەکان
Permutations

ڕێزکردنەکان
Arrangements

گونجێنەکان
Combinations

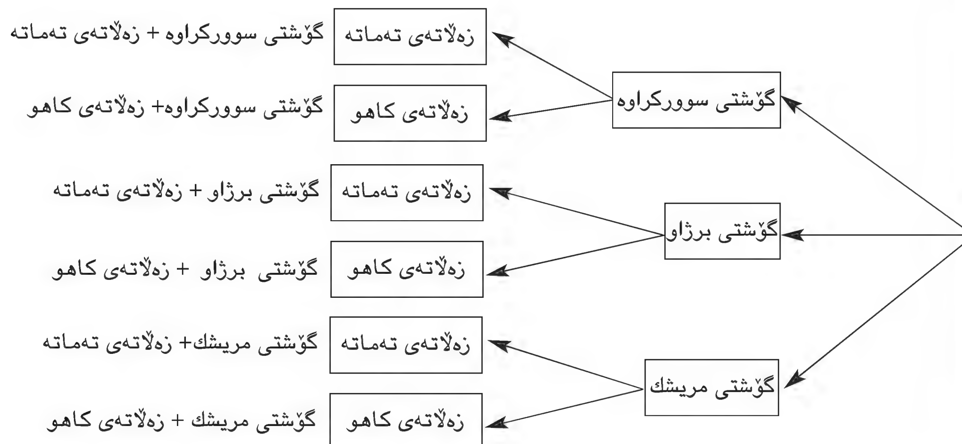
یاسای بنەڕەتی ژماردن
Fundamental counting principle

هێڵکاری درەخت
Tree diagram

نموونە 1

بەکارهێنانی هێڵکاری درەختی بۆ ژماردن

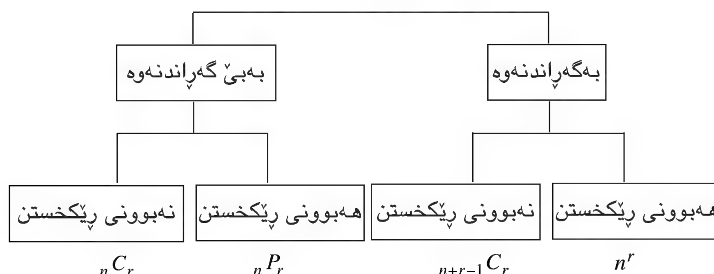
کەسێك چووە چێشتخانەیەك بۆ خواردنی ژەمی نیوەڕۆ، بینی بۆی هەیە جۆرێك هەڵبژێرێت لە نێوان 3 جۆرە گۆشت: گۆشتی برژاو و گۆشتی سورکراوە و گۆشتی مریشك، و جۆرێك لە نێوان دوو جۆرە زەڵاتە، زەڵاتەی کاهۆ و زەڵاتەی تەماتە. هێڵکاری درەختی بکێشە بۆ ڕوونکردنەوەی گشت ڕێگایەکانی لە توانا دایە بۆ هەڵبژاردنی قاپێك گۆشت و قاپێك زەڵاتە، ئەگەری هەڵبژاردنی قاپێك گۆشتی برژاو و قاپێك زەڵاتە هەژماربکە.



ئەو کەسە دەتوانێت قاپێك گۆشت و قاپێك زەڵاتە بە 6 ڕێگا هەڵبژێرێت. و ئەوکەسە بۆ ژەمی نیوەڕۆ دەتوانێت بە دوو ڕێگا قاپێك گۆشتی برژاو و قاپێك زەڵاتە هەڵبژێرێت، لەوەوە ئەگەری هەڵبژاردنی قاپێك گۆشتی برژاو و قاپێك زەڵاتە دەکاتە $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

هەوڵبدە ئەگەری هەڵبژاردنی قاپێك گۆشت و زەڵاتەی تەماتە چەندە؟

هێڵکاری درەختی بەکاردێت کاتێك ژمارەی دەرخستەکان کەم بێت. لە زۆر جاردا ئەم کارە بە ئاسانی ناکرێت. ئەگەر هەوڵتدا بۆ دروستکردنی هێڵکاری درەختی بۆ دۆزینەوەی چەند ژمارە کە لە 5 ڕەنووسی جیاواز دەتوانیت پێکبهێنی بەبەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ئەوا دەبینیت ژمارەی گەڵاکانی درەختەکە زۆر دەبێت. لێرەدا پێویستی بۆ تەکنیکی تر سەری هەڵدا بۆ ژماردن، لەم تەکنیکانە بنەڕەتی ژماردنە. ئەم بنچینە هەڵدەستێت بەوەی کە هەڵبژاردنی r دانە لە n دانە یەك لەدواییەك ژمارەی هەڵبژاردنەکانی کە لەتوانادایە یەکسان دەبێت بە ئەنجامی لێکدانی ژمارەی هەڵبژاردنەکانی کە لە توانادایە. ئەنجامەکان جیاواز دەبن ئەگەر دانە هەڵبژێراوەکە بخرێتە یان نەخرێتەوە ناو کۆمەڵەکە پێش هەڵبژاردنی دانەکەی دواتر، هەروەها ڕێکخستن هەبێت یان فەرامۆش کرابێت. ئەوە شیان دەمانخاتە 4 بارەوە.



تێبینی

ئەگەر باسی جۆری ڕاکێشانەکە نەهاتبوو لە پرسیارەکەدا، ئەوا ڕاکێشانەکە بێ گەڕانەوە و بێ ڕێکخستن دادەنرێت.

نموونە 2 **بەکارهێنانی یاسای ژماردنی بنەڕەتی بۆ دۆزینەوەی ژمارەی دانەکانی نموونەیەك**

چەند ژمارە کە هەریەکەیان لە 5 ڕەنووسی جیاواز دەتوانی پێکبهێنیت بەبەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4، 5، 6 ؟ بۆ پیکهێنانی ئەو ژمارەیە، سەرەتا ڕەنووسی یەکان هەڵبژێرە. دەتوانی لە نێوان 6 ڕەنووس هەڵبژێریت ژمارەی هەڵبژاردنەکان 6 ڕێگایە، لەدوایدا ڕەنووسی دەیان. دەتوانیت لە نێوان ئەو پێنج ڕەنووسە ماوە هەڵبژێری ژمارەی هەڵبژاردنەکانی 5 ڕێگایە، بەم شێوەیە ژمارەی هەڵبژاردنەکانی ڕەنووسی سەدان 4 ڕێگایە، و ژمارەی هەڵبژاردنەکانی ڕەنووسی هەزاران 3 ڕێگایە، و ژمارەی هەڵبژاردنەکانی ڕەنووسی دەهەزاری 2 ڕێگایە، یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربێنە بۆ ئەوەی بزانیت چەند ژمارە پێك دێت.

$720 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$. دەتوانیت 720 ژمارە پێکبهێنی.

هەوڵبدە چەند ژمارە لە 4 ڕەنووسی جیاواز دەتوانیت پێکبهێنی بەبەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7؟

نموونە 3 **دۆزینەوەی ژمارەی ڕێگاکانی ڕاکێشانی نموونەیەك.**

سندوقێك 7 گۆی ڕەنووسکراوی لە 1 تا 7 تێدایە ژمارەی ڕێگاکانی ڕاکێشانی 3 گۆ لەم بارانەدا بدۆزەوە:

أ بە گەڕاندنەوە و ڕەچاوکردنی ڕێکخستن. ب بە گەڕاندنەوە و بێ ڕەچاوکردنی ڕێکخستن.

ج بەبێ گەڕاندنەوە و ڕەچاوکردنی ڕێکخستن. د بە بێ گەڕاندنەوە و بێ ڕەچاوکردنی ڕێکخستن.

أ)	بە گەڕاندنەوە و ڕەچاوکردنی ڕێکخستن.	$n^r = 7^3 = 343$
ب)	بە گەڕاندنەوە و بێ ڕەچاوکردنی ڕێکخستن.	${}_{n+r-1}C_r = {}_{7+3-1}C_3 = {}_9C_3 = 84$
ج)	بەبێ گەڕاندنەوە و ڕەچاوکردنی ڕێکخستن.	${}_7P_3 = 210$
د)	بەبێ گەڕاندنەوە و بێ ڕەچاوکردنی ڕێکخستن	${}_7C_3 = 35$

هەوڵبدە سندوقێك 10 گۆی ڕەنووسکراوی لە 1 تا 10 تێدایە ژمارەی ڕێگاکانی ڕاکێشانی 4 گۆ لەم بارانەدا بدۆزەوە:

أ بە گەڕاندنەوە و ڕەچاوکردنی ڕێکخستن. ب بە گەڕاندنەوە و بێ ڕەچاوکردنی ڕێکخستن.

ج بە بێ گەڕاندنەوە ورەچاوکردنی ڕێکخستن. د بەبێ گەڕاندنەوە و بێ ڕەچاوکردنی ڕێکخستن.

نموونە 4 **هەژمارکردنی ئەگەر بە بەکارهێنانی تەکنیکی ژماردن**

سندوقێك 20 گۆی ڕەنووسکراوی لە 1 تا 20 تێدایە. دوو گۆ ڕاکێشرا یەك لەدوای یەك بەبێ گەڕاندنەوەی گۆی یەکەم بۆ ناوسندووقەکە پێش ڕاکێشانی گۆی دووەم. ئەگەر چەندە کە هەر گۆیەك ڕەنووسی تاکی لەسەر بێت.

هەموو دەرخستەیەك لە دەرخستەکانی ئەو تاقیکردنەوە هەڕەمەکییە بریتییە لە جووتە ڕێکخراوی (n_1, n_2) کە n_1 هێمای ئەو ژمارەیەکە لە سەر گۆی یەکەمەوە n_2 هێمای ئەو ژمارەیە کە لەسەر گۆی دووەمە.ژمارەی دەرخستەکان بەپێی یاسای بنچینەیی ژماردن بریتییە لەئەنجامی لێکدانی ژمارەی گۆیەکانی ناو سندووقەکە لەکاتی ڕاکێشانی گۆی یەکەم (20) لە ژمارەی گۆیەکان لەکاتی ڕاکێشانی گۆی دووەم 19 واتە $380 = 19 \times 20$ ژمارەی ئەو دەرخستانەی کە پاسادانی ڕووداوەکە دەکەن بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی ژمارەی ئەو گۆیانەی ژمارەی تاك هەڵدەگرن لە کاتی ڕاکێشانی گۆی یەکەم (10) لە ژمارەی ئەو گۆیانەی کە ژمارەی تاك هەڵدەگرن لە کاتی ڕاکێشانی گۆی دووەم 9 واتا 90 ، لەوەوە ئەگەری ئەوەی کە هەردوو گۆیەکە ژمارەی تاك هەڵبگرن دەکاتە $\frac{9}{38} = \frac{90}{380}$

خاڵی چاودێری √ ئەگەر چەندە هەرگۆیەك ژمارەی جووتیان لە سەربێ؟

نموونە 5

هەژمارکردنی ئەگەر بەبەکارهێنانی تەکنیکی ژماردن

سندوقێك 6 گۆی سوور و 4 گۆی سپی تێدایە. دوو گۆ لە یەککاتدا ڕاکێشرا. ئەگەری دوو گۆیەکە سوور بن چەندە.

ژمارەی دەرخستەکانی ئەو تاقیکردنەوەیە بریتییە لە ژمارەی گونجێنەکانی دوو گۆ لە بنەڕەتی 10 گۆ$(6+4)$واتە: $_{10}C_2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$

ژمارەی دەرخستنەکانی ئەو ڕووداوە بریتییە لە ژمارەی گونجێنەکانی دوو گۆ لە بنەڕەتی 6 گۆ (ژمارەی گۆیە سوورەکان) واتا: $_6C_2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$

لەوەی پێشوو دەردەچێت کە ئەگەری دوو گۆیەکە سووربن $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

هەوڵبدە ئەگەری هەر گۆشەیەك سپی بێت چەندە؟

نموونە 6

هەژمارکردنی ئەگەر بەبەکارهێنانی تەکنیکی ژماردن.

کارگێڕی زانکۆ ژمارەی دۆسیە کە پێکهاتووە لە 4 ڕەنووس بۆ هەر خوێندکارێکی ساڵی یەکەم تایبەتکردووە. ئەگەری ژمارەی کاروان چەندە کە پێکهاتووە لە 4 ڕەنووسی یەك لەدوای یەك لەلای چەپەوە دەستپێدەکات. بۆ دیاریکردنی ژمارەی دەرخستەکانی ئەو تاقیکردنەوەیە لە سەرمانە دیاریبکەین کە هەر دەرخستەیەك ڕیزکردنی 4 ڕەنووسە لە بنچینەی 10 یان گونجێنی 4 ڕەنووسە لە بنچینەی 10 . لەبەر ئەوەی ڕێکخستنەکە ژمارەی دۆسیەکان لە چەپەوە بۆ ڕاست پێی پلە دەکرێن بایەخی پێدەدرێت، بۆیە دەرخستەکە ڕیزکردنە نەك گونجێن. ژمارەی ئەو دەرخستانە بریتییە لە: $_{10}P_4 = \frac{10!}{4!} = 5040$

دەرخستەکانی ڕووداوەکە بریتییە لە 0123، 1234، 2345، 3456، 4567، 5678، 6789. ژمارەیان 7 ە. لەوەی پێشوو بۆمان دەردەچێت ئەگەری ژمارەی کاروان کە پێکهاتووە لە 4 ڕەنووسی یەك لە دوای یەك بەدەستپێکردن لەلای چەپەوە بریتییە لە $\frac{7}{5040} = \frac{1}{720}$.

هەوڵبدە ئەگەری ژمارەی دۆسیەی خەندە کە پێکهاتووە لە 4 ڕەنووسی یەك بەدوای یەك، ئەگەر خوێندنەوەت لە ڕاستەوە بەرەو چەپ یان بە پێچەوانە بێت چەندە؟

نموونە 7

هەژمارکردنی ئەگەر بەبەکارهێنانی تەکنیکی ژماردن.

سندوقێك 7 گۆی سوورو 3 گۆی ڕەشی تێدایە. سێ گۆ لەیەك کاتدا ڕاکێشرا، ئەگەری چەندە کە بەلایەنی کەمەوە گۆیەك سوور بێت؟

ژمارەی دەرخستەکانی ئەو تاقیکردنەوە بریتییە لە گونجێنی 3 گۆ لە بنچینەی 10 گۆ$(7+3)$ چونکە گۆیەکان بەیەکەوە ڕاکێشران ڕێزکردنی تێدا نیە، واتا گونجێنن: $_{10}C_3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$

دەرخستەکان کە پاسادانی ڕووداوەکە دەکەن ئەوانەن کە پێکدێن لەگۆیەکی سوور ودوو گۆی ڕەش وە ئەوانەی پێکدێن لە دوو گۆی سوور و گۆیەکی ڕەش و ئەوانەی کە پێکدێن لە 3 گۆی سوور.

ژمارەی دەرخستەکان کە پێکدێن لە گۆیەکی سوور و دوو گۆی ڕەش بریتییە لە $_7C_1 \times {_3C_2} = 7 \times 3 = 21$

ژمارەی دەرخستنەکان کە پێکدێن لە دوو گۆی سوور گۆیەکی ڕەش بریتییە لە $_7C_2 \times {_3C_1} = 21 \times 3 = 63$

ژمارەی دەرخستەکان کە پێکدێن لە 3 گۆی سوور بریتییە لە $_7C_3 = 35$

ژمارەی دەرخستەکان کە پاسەدانی دەکەن بریتییە لە $21 + 63 + 35 = 119$

لەوەوە دەردەکەوێت ئەگەری بەلایەنی کەمەوە یەك لە سێ گۆیەکە سووربێت بریتییە لە $\frac{119}{120}$

دەتوانرا ئەم پرسیارە شیکاربکەین بەبەکارهێنانی ڕووداوی تەواوکەر. کەڕووداوی تەواوکەر بۆ ڕووداوی A «گۆیەك لە 3 گۆیەکان سووربێت» بریتییە لە ڕووداوی $\overline{A}$ «هەرسێ گۆیەکە ڕەش بێت» ژمارەی ئەو دەرخستنانەی کە پاسادانی ڕووداوی تەواوکەر دەکەن بریتییە لە گونجێنی 3 گۆ لە بنچینەی 3 کە دەکاتە 1. لەوەوە دەردەکەوێت.

$$P\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{120}$$

$$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{1}{120}=\frac{119}{120}$$

هەوڵبدە ئەگەری بەلایەنی زۆرە یەکێك لەگۆیەکان سوور بێت چەندە؟

ڕاهێنـــــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 پەیوەندی نێوان هێڵکاری درەختی و یاسای ژماردنی بنەڕەتی ڕونبکەوە.

2 پەیوەندی نێوان یاسای ژماردنی بنەڕەتی و هەژمارکردنی ژمارەی ڕێزکردنەکان ڕوونبکەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

3 لەتاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی پێویستیکرد 3 پارچە پارەی کانزایی هاوشێوە هەڵبدرێت. هێڵکاری درەختی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی گشت دەرخستەکانی ئەو ڕووداوە. هێڵکارییەکە بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ئەگەری دەرکەوتنی دوو ڕووی شێر بەلایەنی کەمەوە.

4 کەسێك چووە پێشەنگایەکی ئۆتۆمبێلەکان بۆ کڕینی ئۆتۆمبێلێك، لە پێشەنگاکە بینی ئۆتۆمبێلەکان جۆری فۆرد و مەرسیدیس و تۆیۆتا هەیە، وە بینی لە هەر جۆرێك لە ئۆتۆمبێلەکانی ڕەنگی سپی و ڕەش و زیوی هەیە، هێڵکاری درەختی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئەگەری ئەوەی ئۆتۆمبیلێکی مەرسیدس بکڕێت.

5 چەند ژمارەی 3 ڕەنووسی دەتوانیت پێکبهێنیت بەبەکارهێنانی هەموو ڕەنووسەکان جگە لە 0 ؟

6 سندوقێك 11 گۆی ڕەنووسکراوی لە 1 تا 11 ی تێدایە. ژمارەی ڕێگاکانی هەڵبژاردنی 3 گۆ لەم بارانەی خوارەوە بدۆزەوە.

- **أ** بەگەڕاندنەوە و ڕەچاوکردنی ڕێکخستن.
- **ب** بەگەڕاندنەوە و بێ ڕەچاوکردنی ڕێکخستن.
- **ج** بەبێ گەڕاندنەوە و ڕەچاوکردنی ڕێکخستن.
- **د** بەبێ گەڕاندنەوە وبێ ڕەچاوکردنی ڕێکخستن.

7 سندوقێك 13 گۆی ڕەنووسکراوی لە 1 تا 13 تێدایە، لە تاقیکردنەوە هەڕەمەکییەکە پێویستیکرد دووگۆ ڕابکێشرێت یەك لەدوابیەك ئەگەری ئەوەی گۆیەکان ئەو ژمارەیان لەسەر بێت کەمترە لە 10 چەندە لەکاتی گەڕاندنەوەی گۆی یەکەم بۆ ناو سندوقەکە پێش ڕاکێشانی گۆی دووەم، ولەکاتی نەگەڕاندنەوەی گۆی یەکەم.

8 تووڕەگەیەك 7 گۆی ڕەش و 3 گۆی سووری تێدایە، لە تاقیکردنەوە هەڕەمەکییەکە پێویستیکرد دوو گۆ پێکەوە ڕابکێشرێت، ئەگەر ئەوەی کە دوو گۆیەکە ڕەشبن چەندە؟

9 ووشەی نهێنی چوونە ناو ئینتەرنێت لە 5 پیت لە پیتەکانی ئەبجەدی ئینگلیزی پێکدێت. نیان لە توورەگەیەك چەند کاغەزێکی هاوشێوەی دانا کە هەریەکەیان پیتێك لە پیتەکانی ئەبجەدی ئینگلیزی لەسەرە کە ژمارەیان 26 پیتە، لە پاشاندا 5 کاغەزی ڕاکێشا. ئەگەری چەندە ئەو پیتانە، پێتەکانی دوای یەکبن بە پێی ڕیزبەندی ئەبجەدی؟

10 سندووقێك 9 گۆی سوور و 4 گۆی ڕەشی تێدایە، ئەو گۆیانە گشتیان هاوشێوەن تەنها لە ڕەنگدا جیاوازن لە تاقیکردنەوە هەڕەمەکییەکە پێویستیکرد 3 گۆپێکەوە ڕاکێشرێت، ئەگەری چەندە بەلایەنی زۆرەوە دوو گۆ لە سێ گۆیەکان ڕەشبن؟

پرسیار و جێبەجێکردن

11 ژمارەی خوێندکارانی یەکێك لە پۆلەکان 40 خوێندکارە، لە نێوانیاندا 25 خوێندکار دەرچوونە لە تاقیکردنەوەی بیرکاری، و 28 خوێندکار لە تاقیکردنەوەی زمانی بیانی و 15 خوێندکار لەهەردوو تاقیکردنەوەکە دەرچوونە. لە تاقیکردنەوە هەڕەمەکییەکە پێویستیکرد یەك لە خوێندکارەکانی پۆلەکە هەڵبژێردرێت لەڕێگای دەنگدانەوە تا ببێتە نوێنەریان، ئەگەر چەندە ئەو خوێندکارە لەوانە بێت کە:

- **أ** تەنها لە تاقیکردنەوەی بیرکاری دەرچووبێت.
- **ب** تەنها لە تاقیکردنەوەی زمانی بیانی دەرچووبێت.
- **ج** لەهەردوو تاقیکردنەوەکە دەرچووبێت.
- **د** لەهەردوو تاقیکردنەوەکە دەرنەچووبێت.

12 هێڵکاری درەختی دروستبکە بۆ دۆزینەوەی هەموو ئەو ژمارانەی کە پێکهاتوون لە دوو ڕەنووسی جیاواز، کە دەتوانی پێکی بهێنیت لەڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4، 5.

13 ئەگەر لە سندوقێکدا 5 گۆی ڕەنووسکراو لە 1 تا 5 دابنێت، و دوو گۆ یەك لە دواییەك ڕابکێشێت بەگەڕاندنەوەی گۆی یەکەم بۆ سندوقەکە پێش ڕاکێشانی دووەم، ئەگەری ڕاکێشانی ئەو دوو گۆیە چەندە کە هەمان ڕەنووسیان لە سەربێت.

14 لە سندووقێکدا 18 گڵۆپی کارەبای تێدایە لە نێویاندا 5 گڵۆپ لەکارکەوتووە. لە تاقیکردنەوە هەڕەمەکییەکە پێویستیکرد بە ڕاکێشانی دوو گڵۆپ لە سندووقەکە یەك لەدواییەك بەبێ گەڕاندنەوەی گڵۆپی یەکەم بۆ ناوسندوقەکە پێش ڕاکێشانی گڵۆپی دووەم. ئەگەری چەندە:

- **أ** دوو گڵۆپەکە لەکار کەوتبن؟
- **ب** بەلایەنی کەمەوە یەکێکیان لەکار کەوتبێ؟

15 ئەگەری بەدەستهێنانی دووجار ڕووی خەت و دووجار ڕووی شێر لە کاتی هەڵدانی پارچە دراوێکی کانزایی 4 جار یەك لە دواییەك چەندە؟

16 لەتاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی پێویستیکرد بە هەڵدانی دوو بەردەزار یەکێکیان سوور ئەویتریان شین، و تۆمارکردنی سەرجەمی ئەو دوو ژمارەیەی کە بەدیار دەکەون. هەر ئەگەرێك بدۆزەوە بۆ:

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

- **أ** سەرجەمی دوو ژمارەکە تاکبێت یان گەورتربێ لە 11 .
- **ب** سەرجەم ژمارەیەکی جووتی بچووکتر بێت لە 8.
- **ج** سەرجەم ژمارەیەکی تاك بێت و لەیەك ڕەنووس پێکهاتبێ.



17 لەیاری «جەنگی دەریا» هەر یاریزانێك لەسەرەتادا خاوەنی وێرانکەر و پاپۆڕێکی جەنگی و ژێر ئاو و پاپۆڕی زەخیرە و هەڵگەری فڕۆکەیە، کە لەسەر تابلۆیەکی چوار گۆشەیی دانراوون کە لە 100 خانەپێك هاتووە، ئەم خشتەی بەرامبەر ژمارەی خانەکان نیشاندەدات کە هەر پارچەیەك لەسەر تابلۆیەکە داگیری دەکات.

پارچە	ژمارەی خانەکان
وێرانکەر	2
پاپۆڕی جەنگی	3
پاپۆڕی ژێر ئاو	3
پاپۆڕی زەخیرە	4
هەڵگری فڕۆکەکان	5

ئەگەری چەندە کە یاریزانی یەکەم لە لێدانی یەکەمی لە هیچ پارچەیەکی یاریزانی دووەم نەدات.



18 ئازاد 5 بەردەزاری هەڵدا و ئەوانەی لە وێنەکەدا دیارە بەدەستیهێنا، بڕیاریدا بە هێشتنەوەی ئەو بەردەزارانەی کە 4 خاڵی لەسەرە، وە دوو بەردە زارەکەی تری جارێکی تر هەڵدا.

أ ئەگەری چەندە هەر 5 بەردەزارەکەی ئازاد 4 خاڵی بێت.

ب ئەگەر چەندە بەلایەنی کەمەوە 4 بەردەزاری 4 خاڵی بێت.

ج ئەگەر چەندە کەتەنها 3 بەردەزاری 4 خاڵی دەبێت.

د پەیوەندی چییە لە نێوان وەڵامەکانی أ ، ب ، جـ دا؟

خوێندکارێك هەوڵی شکاندنی ووشەی نهێنی دەدات کە ڕێی پێدەدات بچێتە ناو بژمێری خوێندنگایەکەی: ووشە نهێنیەکە پێکدێت لە 5 ڕەنووس.

19 ئەگەری چەندە کە خوێندکارەکە ووشە نهێنییەکە بشکێنێ کاتێ دووبارەبوونەوەی ڕەنووس ڕێی پێبدرێت؟

20 ئەگەری چەندە کە خوێندکارەکە ووشە نهێنییەکە بشکێنێ کاتێ دووبارەبوونەوەی ڕەنووس ڕێی پێنەدرێت؟

21 ئەگەری چەندە کە خوێندکارەکە بتوانێت ووشە نهێنییەکە بشکێنێت ئەگەر ڕێ بە دووبارەبوونەوەی ڕەنووس نەدرێت و سەرجەمی ڕەنووسەکان بکاتە 10 ؟

22 A و B دوو ڕووداوی یەك تاقیکردنەوەی هەڕەمەکین. $P(A)=0.4$ و $P(B)=0.5$ لە کاتێکدا $P(A\cap B)=0.2$.

أ ئایا دوو ڕووداوەکە سەربەخۆن؟

ب ئەگەری $P(A\cup B)$ بدۆزەوە.

23 سێ ئەسپ سوار A و B و C پێشبڕکێدەکەن، ئەگەری بردنەوەی هەر ئەسپێك چەندە، ئەگەر بزانیت کە ئەگەری بردنەوەی A دوو ئەوەندەی ئەگەری بردنەوەی B بێت، و ئەگەری بردنەوەی B دوو ئەوەندەی ئەگەری بردنەوەی C بێت؟ ئەگەری بردنەوەی B یان C چەندە؟

24 ژن و پیاوێك شەست ساڵ تەمەنیانە. ئەگەری گەیشتنی پیاوەکە بۆ تەمەنی حەفتا ساڵ دەکاتە $\frac{1}{4}$ بێت، و ئەگەری گەیشتنی ژنەکەی بۆ تەمەنی حەفتا ساڵ لەتەمەنی $\frac{1}{3}$ بێت.

أ ئەگەری چەندەکە پێکەوە بگەنە حەفتا ساڵ؟

ب ئەگەری چەندە بەلایەنی کەمەوە یەکێکیان بگاتە حەفتا ساڵ؟

ج ئەگەری چەندە کە هیچ کامێکیان نەگەنە حەفتا ساڵ؟

ڕوانین بۆ دواوە

دوو بەردەزار هەڵدرا

25 ئەگەری سەرجەمی دوو ژمارە دەرکەوتووەکە 12 بێت چەندە؟

26 ئەگەری سەرجەمی دوو ژمارە دەرکەوتووەکە کەمتربێت لە 5 چەندە؟

27 ئەگەری یەك لە دوو ژمارە دەرکەوتووەکە بەلایەنی کەمەوە تاکبێت چەندە؟

28 ئەگەری یەك لە دوو ژمارە دەرکەوتووەکە بەلایەنی کەمەوە بچوکتربێت لە 5 چەندە؟

ڕوانین بۆ پێشەوە

29 لە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی پێویستیکرد بە هەڵدانی دوو بەردەزار، یەك لە دواییەك، وتۆمارکردنی سەرجەمی ئەو دوو ژمارەی کە لەسەر ڕووی دوو بەردەزارەکە دەردەکەوێت. ئەو سەرجەمە کامەیە کە ئەگەری دەستکەوتنی ناگۆڕێت، هەر ژمارەیەك لەسەر بەردەزاری یەکەم دەربکەوێت؟ ئەو ئەگەرە چەندە؟

نەخشەکان Functions

بەشی 2

نەخشەکان لە پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانەدا بەکاردێن بەهۆی بەکارهێنانی هێندەکان لە دەربڕینی گۆڕانەکان و لە پەیوەندی نێوان دور گۆڕاو. نموونە لەسەر ئەوە دەتوانرێ پەیوەندی نێوان خێرایی سوڕانەوەی شەمەندەفەری پێچاوپێچ و ئەو هێزەی سەرنشینەکان جێگیر دەکات لە شوێنەکانیان بە هۆی نەخشە بنوێنرێت.

وانەکان

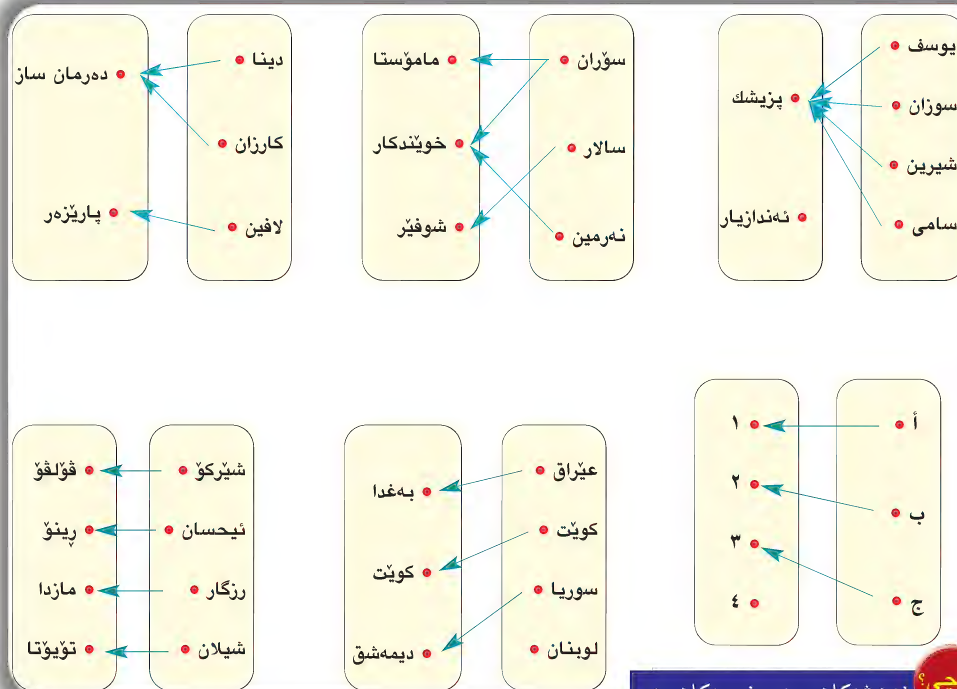
1. نەخشەکان.
2. نەخشە هێڵییەکان.
3. شێوە جیاوازەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ.
4. تەریببوون و ئەستوون بوونی ڕاستە هێڵکان.
5. نەخشە دووجاکان.

گەورەیە وەك نەهەنگ

نەهەنگی قەمبور یەکێکە لە گەورەترین گیانەوەرەکان لە جیهاندا. دەتوانیت نەخشەکان بۆ بەراورد کردنی پێوانەکانی ئەم نەهەنگانە لەگەڵ شتە جیاوازەکان بەکاربهێنی.

وانەی 1

نەخشەکان Functions



بۆچی؟ نەخشەکان وپەیوەندییەکان بە زۆری بەکاردێن بۆ بنیاتنانی نموونە بیرکارییەکان کە دەربڕین لە ژیانی ڕۆژانە یان یاسایەکی زانستی دەکات.

ئامانجەکان

- نواندنی پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو بە ڕوونکردنەوەیی.
- دیاریکردنی بوار و مەودای پەیوەندییەکە.
- دیاریکردنی ئەگەری ئەوەی کە ئایا پەیوەندییەکە نەخشە دەنوێنێت.
- هەژمارکردنی بەهای نەخشە کاتێك گۆڕاوەکە بەهایەکی دیاریکراو وەردەگرێت.

زاراوەکان

Vocabulary

پەیوەندی Relation

گۆڕاوی ئازاد Indepenent Variable

گۆڕاوی پەیوەست (بەستراو) Dependent Variable

خشتەی بەهاکان Table of Values

بوار Domain

مەودا Range

ڕوونکردنەوە Graph

نەخشە Function

وێنە Image

چالاکی

پەیوەندییەکان ونەخشەکان Relations and Functions

1. کارزان پەڕاوی تەلەفۆنی کردەوە وبینی:



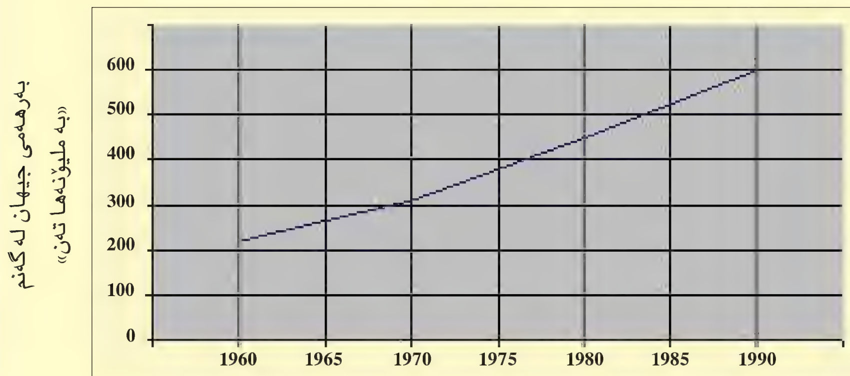
ناو	ژمارەی تەلەفۆن
شکری	235 246
هیوا	456 987
خەسرەو	852 369
خەسرەو	369 852
ڤیان	741 236

ژمارەی تەلەفۆنی ڤیان چەندە؟ ژمارەی تەلەفۆنی خەسرەو چەندە؟

2. بژمێر بەکاربهێنە بۆ تەواوکردنی ئەو خشتەی دێت کە ڕووبەری بازنەت دەداتێ بەپێی بەها جیاوازەکانی نیوەتیرەکەی، پاشان ڕوونیبکەوە چۆن خشتەکەت تەواو کردووە.

نیوەتیرە	1	1.5	4	0.5	0.75	3	0	2.5	10
ڕووبەر	3.14								

3. ئەم وێنە ڕوونەکردنەوەیەی خوارەوە پێشکەوتنی بەرهەمی جیهانی گەنم لە نیوەی دووەمی سەدەی بیستەم ڕووندەکاتەوە بە ملیۆنەها تەن.



وێنە ڕوونکردنەوەییەکە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی بەرهەمی گەنم لەجیهان بۆ ئەوەی ئەو خشتەیەی دێت تەواو بکەیت.

ساڵ	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
بڕی بەرهەمی گەنم							

4. ئەم خشتەیەی دێت تێکڕای پلەکانی گەرما لە کەرکوک دیاریدەکات لە هەفتەی یەکەمی مانگی نیسان.

ڕۆژانی هەفتە	شەممە	یەکشەممە	دووشەممە	سێشەممە	چوارشەممە	پێنجشەممە	هەینی
تێکڕای پلەی گەرماو	26	24	23	20	22	24	26

تێکڕای پلەی گەرمای ڕۆژی یەکشەممە چەند بووە؟ تێکڕای پلەی گەرمای ڕۆژی چوارشەممە چەندبووە؟ ڕۆژی پێنج شەممە چەندبوو؟



ئەگەر چوار نموونەی پێشووت پشکنی دەبینیت هەریەکەیان دووگۆڕاوی تێدایە. وە بەهای یەکێك لەو دوو گۆڕاوانە بەهای ئەوی تریان دیاریدەکات.

خاڵی چاودێری √

5. ئەم خشتەیەی دێت تەواوبکە بە دیاریکردنی گۆڕاوی یەکەم لەهەر نموونەیەك کە بەهای گۆڕاوی دووەم دیاریدەکات.

نموونە	گۆڕاوی یەکەم	گۆڕاوی دووەم
1		
2		
3		
4		

باس لە هەبوونی **پەیوەندی Relation** نێوان دوو گۆڕاوی x و y دەکات، ئەگەر بەهاکانی یەکێکیان زانراوبێت وەك x بەهاکانی دووەم y دیاریدەکات، لەو بارەدا دەڵێین گۆڕاوی یەکەم **گۆڕاوێکی ئازادە Independent Variable** و دووەم **گۆڕاوی پەیوەستە Dependent Variable**.

Functions نەخشەکان

لە نموونەی یەکەم دوودڵ دەبیت لە وەڵامی ئەو پرسیارە: نمرەی تەلەفۆنی خەسرەو چەندە؟ چونکە گۆڕاوی ئازادە کە ناوێکە دوو بەهای گۆڕاوی پەیوەستی بەرامبەرە. بەڵام لە نموونەکانی تر، تۆ تووشی ئەم کێشەیە نابیت چونکە هەر بەهایەکی گۆڕاوی ئازاد بەرامبەر تەنها یەك بەهای گۆڕاوی پەیوەستە.

بە پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاوی x و y دەوترێت نەخشە **Function** ئەگەر هەر بەهایەکی وەك a لە بەهاکانی گۆڕاوی x تەنها یەك بەهای وەك b لە بەهاکانی گۆڕاوی y بەرامبەربێت.
ئەو بەها تاکانەی b پێی دەوترێت وێنە **Image** ی a لە نەخشەکە.

خاڵی چاودێری √

سەر لە نوێ هەر چوار نموونەکە بخوێنەوە، وە لەهەر بارێکدا دیاریبکە ئایا پەیوەندییەکە نەخشەیە یان نا. وەڵامەکەت روونبکەوە.

نموونە 1

ئایا پێدراوەکانی ئەم خشتەیە نەخشە دەنوێنن؟ ئەوە روونبکەوە.

أ)

بەهاکانی گۆڕاوی پەیوەست	بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد
−3.6	1
−3.6	2
4.2	3
4.2	4
10.7	5
12.1	6
52	7

ب)

بەهاکانی گۆڕاوی پەیوەست	بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد
7	3
8	3
10	3
42	4
34	10
18	11
52	52

شیکار

أ) پێدراوەکانی خشتەی یەکەم نەخشە دەنوێنن. چونکە هەر بەهایەك لە بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد یەك بەهای گۆڕاوی پەیوەستی بەرامبەرە.

ب) پێدراوەکانی خشتەی دووەم نەخشە نانوێنن، چونکە بەهای 3 بۆ گۆڕاوی ئازاد سێ بەهای گۆڕاوی پەیوەست 7 ، 8 ، 10 بەرامبەریەتی واتە خشتەی (ب) تەنها پەیوەندی دەنوێنێت.

Different ways to define a function شێوەکانی پێناسەکردنی نەخشە

ئەگەر بڕوانیتە نموونەکانی پێشوو دەبینیت زۆر شێوە بۆ پێناسەی نەخشە هەیە. دەتوانرێت پێناسەی نەخشە بکرێت بە هۆی:

1. خشتەی بەهاکان Table of Values : لەم بارەدا نەخشە پێناسە دەکرێت بە هۆی خشتەیەکی دوو ستوونی، یەکەمیان بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد دەگرێتە خۆی، و ئەوی تریان بەهاکانی گۆڕاوی پەیوەست بەرامبەریان دەگرێتەوە، بە مەرجێك بەهای گۆڕاوی ئازاد و بەهای گۆڕاوی پەیوەست بەرامبەر لە هەمان ریز بنووسرێت.

نموونە: نەخشەی نموونە 4 .

پەیوەندییەکی پێناسەکراو بەهۆی خشتەوە نەخشە پێك ناهێنێت، ئەگەر ستوونی گۆڕاوی ئازاد بەهایەك بگرێتە خۆی لە بەرامبەرەکەی دوو بەهای جیاواز بۆ گۆڕاوی پەیوەست هەبێت.

لێرەوە پەیوەندی پێناسەکراو بەهۆی خشتەوە لە نموونەی یەکەم نەخشە نانوێنێت، چونکە بەهای گۆڕاوی ئازاد (خەسرەو) دوو بەهای جیاوازی گۆڕاوی پەیوەست (ژمارەی تەلەفۆن) بەرامبەریەتی.

2. ڕێسا **Rule** : نەخشە پێناسە دەکرێت بەهۆی ڕێسایەك یان یاسایەك، کە بەهای گۆڕاوی پەیوەست بەپێی گۆڕاوی ئازاد دەردەبرێت.

نموونە: نەخشەی نموونەی دووەم کاتێك بەهای گۆڕاوی پەیوەست A (ڕووبەری بازنە) دەردەبرێت بەپێی گۆڕاوی ئازاد r (نیوەتیرە)، ئەم ڕێسایە ئەمەیە $A(r)=\pi r^2$.

3. **وێنەی ڕوونکردنەوەیی Graph** : نەخشە بەهۆی وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێناسە دەکرێت کاتێك بەهای گۆڕاوی ئازاد لەسەر تەوەری یەکەم (تەوەری x) وبەهای گۆڕاوی پەیوەست لەسەر تەوەری دووەم (تەوەری y) بن. بەهای گۆڕاوی پەیوەست کە بەرامبەر بەهای گۆڕاوی x لە بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد پۆوتانی دووەمی ئەو خاڵە دیاریدەکات لە سەر وێنە ڕوونکردنەوەییەکە کاتێك پۆوتانی یەکەمی خاڵەکە دەکاتە x .

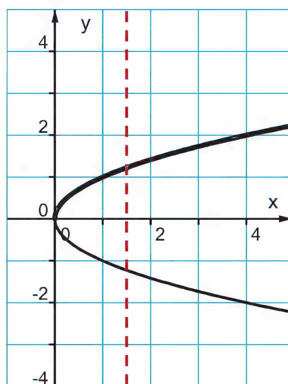
نموونە: نەخشەی نموونەی 3 .

تاقیکردنەوەی ڕاستەهێڵی ئەستوونی Vertical Line Test

ئەگەر ڕاستەهێڵێکی ئەستوونی وێنەیەکی ڕوونکردنەوەی زیاتر لە خاڵێکدا بڕی، ئەوا ئەم وێنە ڕوونکردنەوەییە نەخشە نانوێنێت.

نموونە 2

ئایا ئەو پەیوەندییە پێناسەکراوە بەهۆی وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر نەخشەیە؟



شیکار

پەیوەندی پێناسەکراو بە وێنە ڕوونکردنەوەییەکی بەرامبەر نەخشە نانوێنێت، چونکە هەر بەهایەکی موجەبی گۆڕاوی ئازاد x بەرامبەر دوو بەهای گۆڕاوی پەیوەست y ، وئاشکراشە ڕاستەهێڵە ئەستوونەکە وێنە ڕوونکردنەوەییەکە لە دوو خاڵی جیاوازدا دەبڕێت.

خوێندنی نەخشەکان Studying Functions

بۆ خوێندنی نەخشەیەکی وەك $f(x)$، پێویستە ئەم خاڵانە جێبەجێبکرێت:

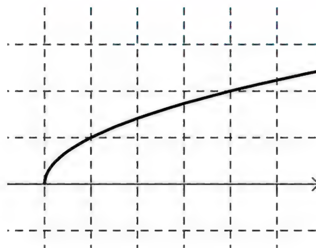
1. دیاریکردنی کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی گۆڕاوی ئازاد x کەدەتوانرێت هەژماری وێنەی $y=f(x)$ بکات. ئەو کۆمەڵەیە پێی دەوترێت بواری پێناسەی نەخشە یان بە کورتی **بواری نەخشە Domain** .
2. دیاریکردنی کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی گۆڕاوی پەیوەست دەیگرێتەوە، و پێی دەوترێت **مەودای نەخشە Range** .
3. نواندنی نەخشەکە بە ڕوونکردنەوەیی واتە نواندنی هەموو جووتە ڕێکخراوەکانی(x,y) کاتێك x دانەبێت لە بواری نەخشەکە و$y=f(x)$. کۆمەڵەی ئەو خاڵانە پێیان دەوترێت **هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشە Graph** .
4. پوختەکردنی سیفەتەکانی نەخشە بەهۆی خوێندنی هێڵی ڕوونکردنەوەکەی.

چۆن ڕوونكردنەوەی نەخشەیەك پێكدەهێنیت؟

ئەگەر نەخشەكە بەهۆی خشتەی بەهاكانەوە پێناسە كرابێت،، هەموو خاڵەكانی (x,y) كە لە خشتەكەدا هاتوون بنوێنە، پاشان ئەو خاڵانە بە هێڵێكی گونجاو بگەیەنە. ئەگەر نەخشەكە بە ڕێسایەك پێناسەكرابێت. خشتەی بەهاكانی نەخشەكە پێكبهێنە وخاڵەكانی بنوێنە وهێڵی ڕوونكردنەوەییەكە بە ڕێگای پێشوو بكێشە. هەروەها دەتوانیت بژمێر (كۆمپیوتر) یان بژمێرە ڕوونكردنەوەییەكان بەكاربهێنیت بۆ دروستكردنی هێڵی ڕوونكردنەوەی نەخشەكە.

ڕاهێـــــــنـــــــان

بەردەوامبوون لە بیركاریدا



1 جیاوازی نێوان نەخشە و پەیوەندی ڕوونبكەوە، نموونەیەك لەسەر وێنەی ڕوونكردنەوەیی بۆ پەیوەندییەك بهێنەوە نەخشە نەبێت.

2 سێ ڕێگا بۆ پێناسەكردنی نەخشە باسبكە.

3 چۆن بواری نەخشەی پێناسەكراو بە هێڵی ڕوونكردنەوەی بەرامبەر ڕووندەكەیتەوە، و مەوداكەی دیاریدەكەیت؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەكراو

ئەو خشتانەی دێن نەخشە دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبكەوە.

4

x	y
5	3
8	4
5	7
9	2

5

x	y
0	3
1	8
2	8
3	−7

6

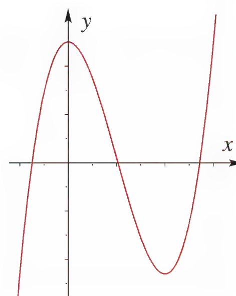
x	y
10	7
20	11
30	9
40	7

7

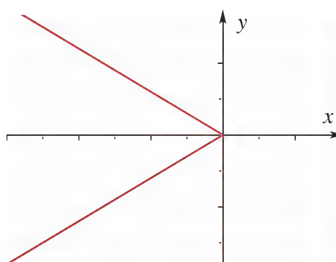
x	y
3	9
2	2
8	−3
2	1

دیاریبكە ئەگەر ئەم وێنە ڕوونكردنەوەییانە نەخشە دەنوێنن یان نا، هۆی وەڵامەكەت ڕوونبكەوە.

8



9

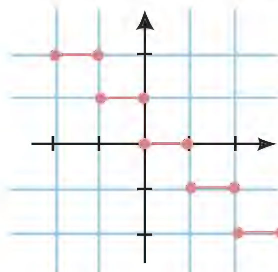


جێبەجێکردن

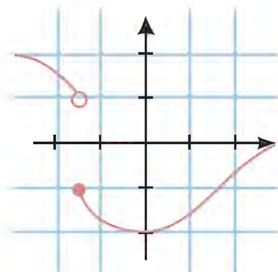
10 **ئۆتۆمبیلەکان:** گۆڕاوی A ئەو ئۆتۆمبیلانە دەنوێنێت کە ڕێگایان پێدراوە لە شارەکەتدا ڕێبکەن وگۆڕاوی N تابلۆی ژمارەی ئەو ئۆتۆمبیلانە دەنوێنن. ئایا پەیوەندییەك لە نێوان A و N دا هەیە؟ ئەگە وەڵامەکەت «بەڵێ»یە، ئایا ئەو پەیوەندییە نەخشەیە؟ کام لە دوو گۆڕاوەکە گۆڕاوی ئازادە و کامیان گۆڕاوی پەیوەستە؟ هۆی وەڵامەکەت دیاریبکە.

بوارو مەودای نەخشەی نوێنراو بەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە دیاریبکە.

11



12



13 بەهای نەخشەی $f(x) = x^2 + 2x - 1$ هەژماربکە کاتێك $x = 3$ و کاتێك $x = 1.5$

جێبەجێکردن

14 **داهات:** زێڕنگرێك 24 هەزار دینار لە هەر کاتژمێرێکی کارکردندا وەردەگرێت، سەرەڕای 20 هەزار دینار بۆ خستنە ڕووی لەکارکەوتنەکان.

أ نەخشەیەك بنووسە داهاتی زێڕنگرەکە R بەپێی ژمارەی کاتژمێرەکانی کار x بنوێنیت.

ب داهاتی زێرنگرەکە هەژماربکە ئەگەر 5.5 کاتژمێر کاربکات.

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئایا ئەم خشتانەی دێن نەخشە دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەرەوە.

15

x	0	2	2	4
y	3	–5	1	7

16

x	1	2	3	4
y	6	6	9	9

17

x	4	4	6	6
y	–2	2	–3	3

18

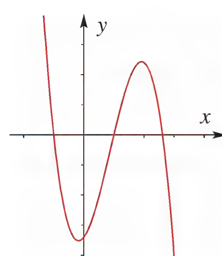
x	–5	–3	–1	1
y	8	8	–2	–2

19

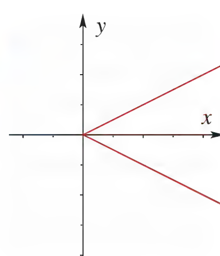
x	–2	–2	0	2
y	–5	–3	4	6

ئایا ئەو وێنە ڕوونکردنەوانەی خوارەوە نەخشە دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

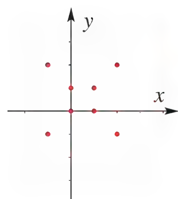
20



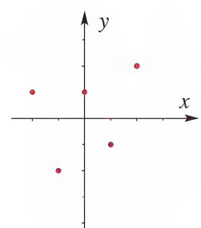
21



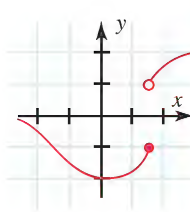
22



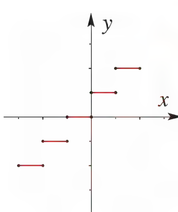
23



24



25



بەهای نەخشەکە هەژماربکە بە لەجیاتیدانان

26 $f(x)=2x-6$ کاتێك $x=1$ ، $x=3$

27 $f(x)=5-3x$ کاتێك $x=1$ ، $x=3$

28 $f(x)=\frac{2x-1}{5}$ کاتێك $x=-9$ ، $x=1$

29 $f(x)=\frac{x-4}{5}$ کاتێك $x=-9$ ، $x=9$

30 $f(x)=2x^2-3x$ کاتێك $x=3$ ، $x=-2.5$

31 $f(x)=x^2+4x-1$ کاتێك $x=2$ ، $x=1.5$

32 $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ کاتێك $x=-1$ ، $x=\frac{3}{4}$

33 $f(x)=-4x^2$ کاتێك $x=\frac{3}{2}$ ، $x=-2$

هێڵی ڕوونکردنەوەیی بۆ نەخشەکە بکێشە بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی یان بە ڕێگای ئاسایی ، لە پاشان بوار ومەوداکەی دیاریبکە.

34 $y=-\frac{x}{2}$ **35** $y=-\frac{2}{3}x-5$ **36** $y=-2x^2$ **37** $y=2$

38 $y=-6$ **39** $y=x^2$ **40** $y=x^2+2$

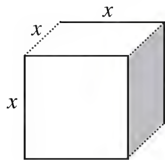
41 ڕوونکردنەوەی نەخشەیەك بکێشە بوارەکەی $-3\le x\le 3$ ومەوداکەی $-5\le y\le 5$ بێت.

42 ڕوونکردنەوەی نەخشەیەك بکێشە بوارەکەی $-2\le x\le 5$ ومەوداکەی $0\le y\le 4$ بێت.

بەرەنگاری

بەهای نەخشەی $f(t)=t^2-3$ لە هەر بارێکدا هەژماربکە.

43 $t=\sqrt{2}$ **44** $t=\sqrt{2}-1$ **45** $t=c+\sqrt{2}$



ئەندازە: هێمای گۆڕاوی V بۆ قەبارەی شەشپاڵووی بەرامبەر دابنێ.

46 نەخشەیەك بنووسە بۆ قەبارەی شەشپاڵووکە V بەپێی درێژی لاکەی x .

47 ڕووبەری ڕوویەك لە ڕووەکانی شەشپاڵووەکە هەژماربکە کاتێك قەبارەکەی $27m^3$ بێت.

48 بەکاربردن: فرۆشگایەکی جلوبەرگ داشکانێکی بەرێژەی 30% لەسەر هەموو جلوبەرگەکان ڕاگەیاند.

أ دانا 47.25 هەزار دیناری دا بۆ نرخی کراسێك لە وەرزی داشکاندنەکە، ئایا نرخی کۆنی کراسەکە چەندبووە؟

ب زانا پانتۆڵێکی کڕی نرخەکەی 52 هەزار دینار بوو پێش وەرزی داشکاندنەکە. ئایا نرخە تازەکەی چەندە؟





ڕوانین بۆ دواوە

49 ئەم خشتەیەی خوارەوە بە ملیۆنەها ئەو کەسانە دیاریدەکات کە لە تەمەنی 21 تا 24 ساڵیدا دەستیان لە خوێندن هەڵگرتووە.

أ ئەگەری ئەوە چەندە یەکێك لە دەرچووەکان لە ئاستی ماجستێر یان دکتۆرادابێ وکاربکا؟

ب ئەگەری ئەوە چەندە کەسێك کە بە هەرەمەکی هەڵبژێردرابێت لە ئاستی بنەڕەتی بێت و کار نەکات؟

کارکردنی دەرچووەکان 21 تا 24 ساڵی (بەهەزار)		
ئاستی خوێندن	کاردەکەن	کارناکەن
بنەڕەتی	1.060	0.834
دواناوەندی	2.793	1.157
پیشەیی	4.172	1.634
بەکەلۆریۆس	1.53	0.372
ماجستێر یان دکتۆرا	0.104	0.041

50 بڕی $2 \div [7-(3-5)-2]3$ بە بەکارهێنانی ڕیزیەتی کردارەکان هەژمار بکە.



ڕوانین بۆ پێشەوە

51 وێنەی ڕوونکردنەوەیی بۆ پەیوەندی $y = x^2 - 2x - 10$ بکێشە لە نێوان x و y. و ڕوونیبکەوە بۆچی ئەم پەیوەندییە نەخشە دەنوێنێ. بوار و مەودای نەخشەکە دیاریبکە.

وانەی

2

نەخشە هێڵییەکان Linear Functions



بۆچی

نەخشەی هێڵی سادەترین شێوەی نەخشەی جەبرییە و هەروەها لە بنیاتنانی نموونە بیرکارییەکان لە بارەکانی ژیانی ڕۆژانەدا زۆر بەکاردێن.

ئامانجەکان

- ناسینەوەی نەخشەی هێڵی.
- نەخشەی هێڵی بۆ بنیاتنانی نموونە بیرکارییەکان بەکاردەهێنرێت.
- بوار و مەودای نەخشەی هێڵی و خاڵەکانی یەکتربڕینی لەگەڵ دوو تەوەری پۆوتانەکاندا دیاریدەکات.

زاراوەکان

Vocabulary

نەخشەی هێڵی
Linear function

لاری Slope

چالاکی

دۆزینەوەی نەخشەی هێڵی Exploring linear function

دەزانی کە پلەی کوڵانی ئاو 100 پلەی سەدییە. بەڵام ڕەنگە نەزانیت کە 100 پلەی سەدی پلەی کوڵانی ئاوە لە شوێنێك لە ئاستی ڕووی دەریابێت (بەرزییەکەی لە ڕووی دەریا سفر دەبێت) پلەی کوڵانی ئاو دەگۆڕێت بە گۆڕانی بەرزی شوێنەکە لە ڕووی دەریاوە. ئەو پلەیە لەسەر چیاکانی هێمالایا کەمترە لە 100 پلەی سەدی بەڵام زیاترە لە 100 پلەی سەدی لە دەریای مردوو. ئەم خشتەیەی دێت هەندێك شوێنی جیهان و بەرزییەکانی دیارکردوە، لە ئاستی ڕووی دەریاو پلەی کوڵانی ئاو تێیاندا.

شوێن	بەرزی لەئاستی ڕووی دەریا (بەمەتر)	پلەی کوڵانی ئاو
بەسرە (عێراق)	0	100
فیربۆرگ (سویسرا)	586	99.68
سوفەر (لوبنان)	1 250	99.135
کولۆرادۆ سبرنگر (ئەمریکا)	1 832	98.995
قورنە سەودا (لوبنان)	3 220	98.23
دەریای مردوو (ئوردون)	−420	100.23

1. پێدراوەکانی خشتەکە لە ڕووتەختی پۆوتاندا بنوێنە کە تەوەری یەکەم x بۆ بەرزی لە ڕووی دەریا بە مەترە، وە تەوەری دووەم y بۆ پلەکانی گەرمی بە پێوەرەی سەدی.
2. خاڵەکان بە پارچە ڕاستەهێڵ بگەیەنە. چی تێبینی دەکەیت؟
3. ئایا پەیوەندی نێوان بەرزی لە ڕووی دەریاو پلەی کوڵانی ئاو نەخشەیە؟ ئەوە ڕوونبکەوە.
4. ئەو وێنە ڕوونکردنەوەییەی دەستتکەوت بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی پلەی کوڵانی ئاو لە بەرزی 3000 مەتر لە ڕووی دەریاوە.
5. ئەو وێنە ڕوونکردنەوەییەی دەستتکەوت بەکاربهێنە، بۆ خەمڵاندنی بەرزی شوێنێك لە ڕووی دەریاوە، ئەگەر بزانیت پلەی کوڵانی ئاو تیایدا 97 پلە بێت.
6. لە کوێدا وێنە ڕوونکردنەوەییەکە تەوەرەی y دەبڕێت؟ ئەم خاڵە چی دەنوێنێت؟

جێبەجێکردن

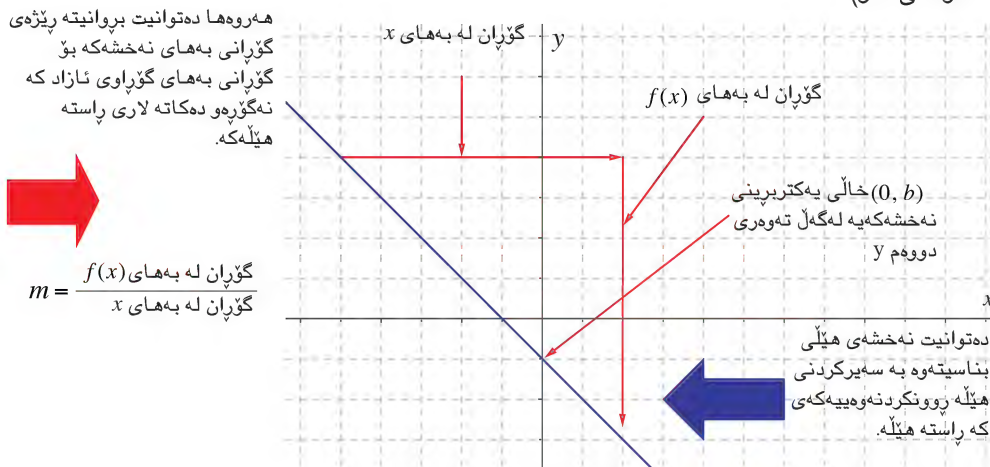
فیزیا

نەخشەی هێڵی Linear Function

نەخشەی هێڵی: نەخشەیەکە ڕوونکردنەوەکەی هێڵێکی ڕاستە.

ڕێسای نەخشەی هێڵی بەم شێوەیە دەنووسرێت: $f(x)=mx+b$

دەتوانیت نەخشە هێڵییەکان بۆ بنیاتنانی نموونەی بیرکای بەکاربهێنیت بۆ هەندێ لە پەیوەندییەکانی نێوان دوو گۆڕاو وەك پەیوەندییەکەی پێشوو (بەرزی لە ڕووی دەریاو پلەی کوڵانی ئاو).

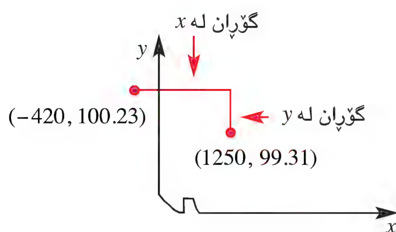


ڕێژەی گۆڕانی بەهای نەخشەی هێڵی $f(x)$ بۆ گۆڕانی بەهای x نەگۆڕە و ئەو ڕێژەیەش پێی دەوترێت لاری **Slope** نەخشەی هێڵی.

نموونە 1

أ پێدراوەکانی خشتەی لاپەڕەی پێشوو بەکاربهێنە بۆ ڕوونکردنەوەی چۆنیەتی گۆڕانی پلەی کوڵانی ئاو کاتێك بەرزی لە ڕووی دەریا دەگۆڕێت.

ب ڕێسای نەخشەی پلەی کوڵانی ئاو بە پێی بەرزی لە ڕووی دەریاوە بنووسە.



شیکار

أ x بەکاربهێنە بۆ بەرزی (بەمەتر) لە ڕووی دەریاوە و y بۆ پلەی کوڵانی ئاو بە پێوەری سەدی. دوو بەها بۆ گۆڕاوی ئازادی x بەکاربهێنەو دوو بەهای نەخشەکەی بەرامبەریان وەك بەرزی سوفەر لە لوبنان و دەریای مردوو لە ئوردن. ڕێژەی گۆڕانی پلەی کوڵانی ئاو بۆ گۆڕانی بەرزی لە ڕووی دەریاوە هەژماربکە بۆ ئەوەی لاریت دەستبکەوێت.

$$m = \frac{\text{گۆڕان لە نەخشە}}{\text{گۆڕان لە } x} = \frac{99.31-100.23}{1250-(-420)} = -\ 0.00055$$

ئەمەش وادەگەیەنێت زیادبوونی هەر مەترێك لە بەرزی لە ڕووی دەریاوە دەبێتە هۆی گۆڕان لە پلەی کوڵانی ئاو بە بڕی -0.00055 پلە.

ب پلەی کوڵانی ئاو = پلەی کوڵانی ئاو لە ئاستی ڕووی دەریا + m × بەرزی

$f(x) = 100 + (-0.00055)x$

کەواتە ڕێسای نەخشەکە $f(x) = 100 - 0.00055\ x$

بیری ڕەخنەگر

ئایا پلەی کولانی ئاو زیاد دەکات یان کەم دەکا ئەگەر بەرزی لە ڕووی دەریا زیادبکات؟
ڕوونیبکەوە چۆن خشتەی سەرەتای وانەکە بەکاردەهێنیت بۆ وەلامدانەوەی ئەم پرسیارە.
ڕوونیبکەوە چۆن ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=100-0.00055x$ بەکاردەهێنیت.

بەرەنگاری

شارا ڕێسای نەخشەیەکی هێڵی دۆزییەوە هەروەك لە بەرامبەردا هاتووە.
ڕێگاکانی شارا باسبکە.
دوو شوێنی تر لە خشتەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ڕێسای نەخشەکە. ئایا هەمان ڕێسات دەستدەکەوێت؟

$m=-0.00055$
$f(x)=mx+b$
$100=-0.00055(0)+b$
$100=b$
ڕێسای نەخشەکە ئەمەیە:
$f(x)=-0.00055x+100$

نموونە 2

هەژماری $f(9)$ بکە کاتێك $f(x)=\frac{1}{3}x+17$. بەهای x چەندە ئەگەر $f(x)=-1$ ؟

شیکار

لە جیاتی x بەهای 9 دابنێ.

$$f(9)=\frac{1}{3}\times 9+17$$
$$=3+17$$
$$=20$$

لە جیاتی $f(x)$ بەهای 1− دابنێ وشیکارییبکە.

$$f(x)=\frac{1}{3}x+17$$
$$-1=\frac{1}{3}x+17$$
$$-18=\frac{1}{3}x$$
$$-54=x$$

بەرەنگاری

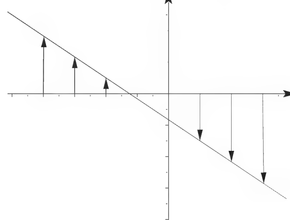
ڕوونیبکەوە چۆن نەخشەی نموونە 1 بەکاردەهێنی بۆ دیاریکردنی پلەی کولانی ئاو لە شوێنێك 8000m لە ڕووی دەریا بەرزبێت. ئەو پلەیە دیاربکە.

بەرەنگاری

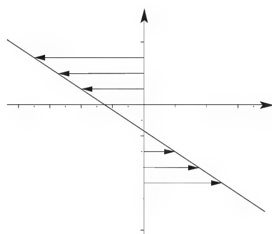
ڕوونیبکەوە چۆن نەخشەی نموونە 1 بەکاردەهێنی بۆ دیاریکردنی بەرزی شوێنێك لە ڕووی دەریا کە پلەی کولانی ئاو تێیدا 85 پلەی سەدی بێت. ئەو بەرزییە دیارییکە.

خوێندنی نەخشەی هێڵی — Studying linear function

ڕێسای نەخشەی هێڵی $f(x)=mx+b$ ڕێگا بە هەژمارکردنی بەهای نەخشەکە دەدات کاتێك بەهای گۆڕاوی x هەرچەند بێت. لەوەوە دەردەچێت کە $f(x)$ پێناسە کراو دەبێت بەهای x هەرچییەك بێت. بەمەش بوارەکەی کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان دەبێت. وە لە لایەکی تریشەوە، هەر ژمارەیەکی ڕاستی دەکرێت ببێت بە بەها بۆ نەخشەی هێڵی، چونکە دەتوانیت هەژماری بەهای x بکەیت، ئەگەر بەهایەکی نەخشەکەت زانی. لەوەوە دەردەچێت کە مەودای نەخشەی هێڵی کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانە.



لەهێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی هێڵی دەردەکەوێت کە بوارەکەی هەموو تەوەری x بەتەواوی دەگرێتەوە.



لەهێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی هێڵی دەردەکەوێت کە مەوداکەی هەموو تەوەری y بە تەواوی دەگرێتەوە

کاتێك نەخشەکە بارێکی ژیانی ڕۆژانە دەنوێنێت، ئەمە وادەکات بوارو مەوداکەی سنووردار بێت.

نموونە 3

لووتکەی ئیڤەرێست کە دەکەوێتە چیاکانی هیمالایا، بەرزییەکەی 8848m لە ڕووی دەریابەرزە، بە بەرزترین شوێن لە ڕووی زەوی دادەنرێت. هەروەها دەریایی مردوو کە 420m لەڕووی دەریا نزمە، بەنزمترین شوێنی ڕووی زەوی دادەنرێت. ئەو دوو زانیارییەی پێشوو بەکاربهێنە بۆ ئەوەی بە ووردی بوار و مەودای نموونە 1 دیاریبکەیت.

شیکار

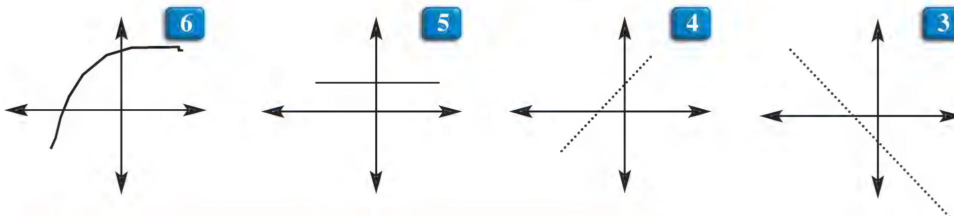
نەخشەی نموونە 1 نموونەیەکی بیرکاری بۆ بارێکی ژیانی ڕۆژانە پێکدەهێنێت. لەوەوە دەردەچێت کە گۆڕاوی ئازاد x سنووردارە بە چەند بەهایەکی دیاریکراو. بەپێی دوو زانیارییەکەی پێشوو ئەو بەهایانە وەردەگرێت کە دەکەوێتە نێوان -420 ، 8848 ، لەبەر ئەوە بواری نەخشەی نموونە 1 کۆمەڵەی ئەو ژمارە ڕاستییانەیە کە پاسادانی لا سەنگەی $-420 \le x \le 8848$ دەکەن. بۆ دیاریکردنی مەودا لەم بارەدا دەبینین کە بەهاکەی کەمدەکات هەرچەندە بەرزی h زیاد بکات، ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە بەرزترین بەهای بەرامبەر نزمترین بەهای گۆڕاوە ئازادەکەیە، واتا: $f(-420)=100.23$ و نزمترین بەهای بەرامبەر بەرزترین بەهای گۆڕاوی X دەبێت، واتا: $f(8848)=95.13$. بەم شێوەیە مەودای نەخشەی نموونە 1 کۆمەڵەی ئەو ژمارە ڕاستییانەیە کە پاسادانی $95.13 \le y \le 100.23$ دەکەن.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. چۆن پاسادانی ئەوە دەکەیت کە خاڵێك پۆوتانەکەی زانراوبێت دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵێك هاوکێشەکەی زانراوبێت.
2. ڕوونیبکەوە چۆن ڕێسای نەخشەیەکی هێڵی دەدۆزیتەوە بەزانینی هێڵی ڕوونکردنەوەکەی.

ئایا ئەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە نەخشەی هێڵی دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەوە.



ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئایا ئەم نەخشانە هێڵین؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

7. $f(x)=2-x^2$
8. $f(x)=-3x-6$
9. $g(x)=4+10x$
10. $f(x)=x^3-x$
11. $f(x)=\frac{3}{2}x+4$
12. $g(x)=\frac{1}{x}$

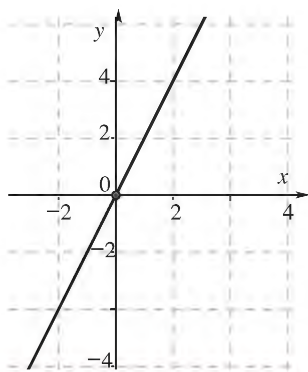
جێبەجێکردن

بیرکاری بەکاربەر

13. خشتەی خوارەوە تێچوونی پەیوەندییە تەلەفۆنیەکانی نێودەولەتییە، لەگەڵ باجە نەگۆڕەکەی کە بەهاکەی دووهەزار دینارە.

ژمارەی خولەك	1	2	3	4	5	6
تێچوون بەهەزاردینار	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00

خشتەکە بەکاربهێنە بۆ نووسینی نەخشەیەك، بوار و مەودای نەخشەکە دیاریبکە.



14 شێوەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەیەکی هێڵی دیاریدەکات، خشتەی بەهاکانی پێکبهێنەو ڕێساکەی بنووسە.

جووتە ڕێکخراوەکە تەواوبکە بە مەرجێك خاڵەکە بکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی $y = -4x + 21$.

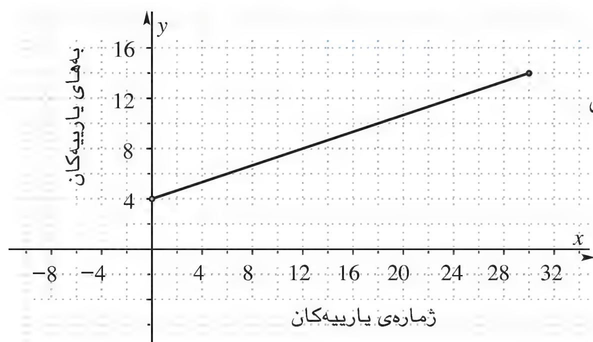
15 $(5, ?)$	**16** $(?, 9)$
17 $(0, ?)$	**18** $(?, 0)$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

جووتە ڕێکخراوەکە تەواو بکە بە مەرجێك خاڵەکە بکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی $y = 2x - 14$.

19 $(8, ?)$	**20** $(10, ?)$	**21** $(0, ?)$	**22** $(?, 0)$
23 $(5, ?)$	**24** $(-5, ?)$	**25** $(3, ?)$	**26** $(?, 3)$
27 $(?, 6)$	**28** $(?, -4)$	**29** $(?, -7)$	**30** $(?, 10)$

31 **ئەندازەی پۆوتان** وێنەی ڕوونکردنەوەکە پەیوەندی نێوان ژمارەی یارییە ئەلیکترۆنیەکانی (نێوان 0 و 30) و نرخەکەی دیاریدەکات. خشتەی بەهاکانی ئەم نەخشەیە پێکبهێنە وڕێساکەی بنووسە.



32 **ئۆتۆمبیلەکان** کاتێك تانکی سووتەمەنی ئۆتۆمبیلەکەت پڕ دەکەیت، بڕی سووتەمەنی لە تانکیەکە نەخشەیەکە، گۆڕاوە ئازادەکەی ژمارەی خولەکەکانە. وای دابنێ کە ئەو سووتەمەنییەی دەرژێتە ناو تانکییەکە بە تێکڕای 18 لیترە لەهەر خولەکێکدا و فراوانی تانکییەکە دەگاتە 35 لیتر.

أ ڕێسای نەخشەیەك بنووسە بڕی ئەو سووتەمەنییەی کە دەرژێتە ناو تانکییەکە بە پێی کات بنوێنێت.

ب بوار و مەودای ئەم نەخشەیە دیاریبکە.

33 **بۆ خۆشی** یانەی ژیان CD دەفرۆشێت وەك لەم خشتەیەی خوارەوە دیاریکراوە لەگەڵ پارەی باجی بەشداربوونی لە یانەکەدا کە دەگاتە 35 هەزار دینار.

ژمارەی CD	0	2	4	6	8	10	12	14
تێچوون (بەهەزار دینار)	35	51	67	83	99	115	131	147

نەخشەیەك بنووسە ئەمە بنوێنێت.

بەرەنگاری

34 **تەکنەلۆژیا** بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەکەی دوو پرسیارەکەی پێشوو لە هەمان ڕووتەختی پۆوتاندا. بەراوردی نێوان هەردوو دەرختەکە بکە. کام یانەیان دەرختە باشتر پێشکەش دەکات؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

ڕوانینێك بۆدواوە

خشتەی بەهاکانی هەر نەخشەیەك پێکبهێنە بە لە جیاتیدانانی بەهاکانی 1، 2، 3، 4، 5، 10 لە جیاتی x و هێڵە ڕوونکردنەوەکەی بکێشە.

35 $y = 2x + 1$

36 $y = 5x - 1$

بە هزری بەهای ژمارەیی هەر بڕێك هەژماربکە.

37 $300 - 196$

38 10×30

39 $\frac{480}{16}$

40 $1\,000 \times 1\,000$

ڕوانینێك بۆپێشەوە

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	4	9	16	25	36	49	64

41 لە خشتەی سەرەوە ووردبەرەوە. ئایا نەخشەی هێڵی دەنوێنێت؟

42 ڕێسایەك بۆ پەیوەندی نێوان x و y بنووسە. پێدراوەکانی خشتەکە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە و وەڵامەکەی پێشووت ساغبکەوە.

وانەی 3

شێوە جیاوازەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ

Various forms of the equation of a line



بۆچی

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ ڕۆڵێکی گرنگ لە بیرکاری دەگێڕێ، سادەترین شێوەی نەخشە جەبرییەکان دەنوێنێ. هەروەها بۆ بنیاتنانی نموونەکانی زۆربەی پرسیارەکانی ژیان بەکاردێت.





ئامانجەکان

- ناسینی شێوە جیاوازەکانی هاوکێشەی ڕاستە هێڵ.
- نووسینی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوە جیاوازەکانی

زاراوەکان

Vocabulary

شێوەی لاری - یەکتربڕین
Slope - Intercept form

شێوەی لاری ـ خاڵ
Slope - Point form

یەکتربڕینی ستوونی
y - Intercept

یەکتربڕینی ئاسۆیی
x - Intercept

شێوەی دووخاڵ
Two - points Form

شێوەی گشتی
Standard Form

چالاکی 1

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین Slope-Intercept Form

نەوزاد سەردانی کۆمپانیایەکی بەکرێدانی ئۆتۆمبیلی کرد. فەرمانبەری کۆمپانیاکە پێی ڕاگەیاند دەبێ 100 هەزار دینار بدات کاتێك ئۆتۆمبیلەکە وەردەگرێت و 1.5 هەزار دینار بدات بۆ هەر کیلۆمەترێك دەیبڕێت.

1. ئەم خشتەی دێت تەواوبکە.

ژمارەی کیلۆمەترەکان	10	20	30	
ئەوەی پێویستە بیدات	$1.5\times 10+100$			

2. هاوکێشەی گۆڕەی y کە پێویستە بیدات بەپێی ژمارەی کیلۆمەترەکانی x بنووسە.
3. ئەم هاوکێشەیە بە ڕونکردنەوەیی بنوێنە.

جێبەجێکردن

بازرگانی

شێوەی لاری – یەکتربڕین Slope - Intercept Form

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین بریتییەلە $y = mx+b$ ، کاتێك m و b دوو ژمارەی ڕاستین، ژمارەی m لاری ڕاستەهێڵەکەیەو b پۆوتانی دووەمی خاڵی یەکتربڕینی ڕاستە هێڵەکەیە لەگەڵ تەوەری y ، یان **یەکتربڕینی ستوونی y- intercept** ڕاستەهێڵەکەیە.

نموونە 1

لاری ڕاستەهێڵەکەو یەکتربڕینە ستوونییەکەی دیاریبکە.

أ $y = 3x - 4$ ب $y = -5x + 3$ ج $y = 5$

شیکار

أ لاری 3 و یەکتربڕینەکەی -4 .

ب لاری -5 و یەکتربڕینەکەی 3.

ج لاری 0 و یەکتربڕینەکەی 5 .

هەڵبدە ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە کە ئەم هاوکێشەیە $y = 2x - 8$ دەنوێنێ.

چالاکی 2

شێوەی لاری – خاڵ Slope - Point Form

ئەگەر لاری ڕاستەهێڵێك m و خاڵێك (h, k) کە پێیدابڕوات بزانیت، ئەوا دەتوانیت هاوکێشەکەی بنووسیت:

1. هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین بریتییە لە $y = ax + b$. ئایا پەیوەندی نێوان لارییەکە m و هاوکۆلکەی x لەو هاوکێشەدا چییە؟
2. بنووسە کە ڕاستەهێڵەکە بە خاڵی (h, k)دا دەڕوات، پاشان لە جیاتی x بەهای h و لە جیاتی y بەهای k دابنێ.
3. هاوکێشەکە شیکاربکەو بەهای b بەپێی m و h و k بدۆزەوە.
4. لە جیاتی b بەهاکەی دابنێ. و هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکە بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین بنووسە.

شێوەی لاری – خاڵ Slope - Point Form

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری ـ خاڵ بریتییەلە $y - y_1 = m(x - x_1)$ کاتێك:

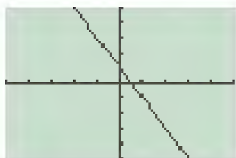
- m لاری ڕاستە هێڵەکەیە.
- (x_1, y_1) خاڵێکە ڕاستەهێڵەکە پێیدا دەڕوات.

نموونە 2

هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە لارییەکەی -2 بێت و بە خاڵی $(1,-1)$دا دەڕوات پاشان وێنەکەی بکێشە.

شیکار:

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - (-1) &= -2(x - 1) \\
y + 1 &= -2x + 2 \\
y &= -2x + 1
\end{aligned}
$$



هەڵبدە هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە کە لارییەکەی 3 بێت و بە خاڵی $(-2, -1)$ دابڕوات پاشان وێنەکەی بکێشە.

چالاكی 3

شێوەی دووخاڵ Two Points Form

هاوكێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە كە بەدوو خاڵی $(5, 3)$ و $(7, 4)$ دا دەڕوات.

1. لاری ڕاستەهێڵەكە هەژماربكە.
2. هاوكێشەكەی بنووسە لەسەر شێوەی لاری ـ خاڵ. پاشان لەسەر شێوەی لاری ـ یەكتربڕین.

شێوەی دووخاڵ Two Points Form

هاوكێشەی ڕاستەهێڵێك بە دووخاڵی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دا دەڕوات.

بریتییەلە: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

هەوڵبدە

هاوكێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵی $(5, 65)$ و $(7, 71)$ دادەڕوات بە شێوەی لاری ـ یەكتربڕین بنووسە.

شێوەی گشتی Standard Form

چالاكی 4

شێوەی گشتی Standard Form

بەڕێوەبەرایەتی باخچەی ئاژەڵان بلیتی چوونە ژوورەوەی بە 10 هەزار دینار بۆ گەورەكان و بە 5 هەزاردینار بۆ منداڵان دیاریكردووە. دەستكەوتی ڕۆژی چوارشەممەی گەیشتە 1 350 000 دینار.

جێبەجێكردن
بۆخۆشی

خشتەی بەهاكان	
x	y
50	
	120
	70
120	

1. x بەكاربهێنە بۆ ژمارەی گەورەكان و y بۆ نواندنی ژمارەی بچووكەكان دابنێ. هاوكێشەیەك بنووسە بۆ دەربڕینی دەستكەوتی ڕۆژی چوارشەممە كە 1 350 000 دینار بوو.
2. خشتەكە تەواو بكە بۆ پێكهێنانی جووتە ڕێكخراوەكانی كە پاسادانی هاوكێشەكە دەكەن.
3. بە ڕوونكردنەوەیی هاوكێشە دەستكەوتووەكەت بنوێنە بە بەكارهێنانی جووتەڕێكخراوەكان. شێوەی وێنە ڕوونكردنەوەكە چۆنە؟
4. وەڵامەكەت لەبارەی وێنە ڕوونكردنەوەییەكە ساغبكەوە لە ڕێگای شیكاركردنی هاوكێشەكە بە نووسینی y بە پێی x.

خاڵی چاودێری √

شێوەی گشتی Standard Form

هاوكێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی گشتی بریتییەلە $ax + by = c$ كاتێك:

- a و b و c ژمارەی ڕاستین.
- بەلایەنی كەم یەك لە دوو ژمارەی a و b یەكسان نەبێت بە 0 .

نموونە 3

هاوكێشەی هەریەك لەو ڕاستەهێڵانە بە شێوەی گشتی بنووسە:

أ $y = -2x + 3$ ب $x = -13y + 4$ ج $\frac{3}{4}x - 2 = 3y$

شیكار

أ $y = -2x + 3$

$2x + y = 3$

ب $x = -13y + 4$

$x + 13y = 4$

ج $\frac{3}{4}x - 2 = 3y$

$\frac{3}{4}x - 2 - 3y = 0$

$\frac{3}{4}x - 3y = 2$

ئەم شێوەیە گشتییە چونكە بەم شێوەیە دەنووسرێت $\frac{3}{4}x + (-3)y = 2$

نموونە ④

هاوکێشەی هەر ڕاستەهێڵێك بە شێوەی لاری - یەکتربڕین بنووسە.

أ $2y-2x=6$ ب $6x+4y=4$ ج $\frac{3}{4}y-6x=3$

شیکار:

أ
$$2y-2x=6$$
$$2y=2x+6$$
$$y=x+3$$

ب
$$6x+4y=4$$
$$4y=-6x+4$$
$$y=-\frac{3}{2}x+1$$

ج
$$\frac{3}{4}y-6x=3$$
$$\frac{3}{4}y=6x+3$$
$$y=8x+4$$

هەڵبدە هاوکێشەی $y-23=5(x-4)$ بە شێوەی لاری - یەکتربڕین، پاشان بە شێوەی گشتی بنووسە.

ڕاستەهێڵە ئاسۆییەکان و ئەستوونەکان Horizontal and Vertical Lines

هاوکێشەی ڕاستەهێڵی ئاسۆیی بریتییەلە $y=b$ کاتێك b یەکتربڕینی ڕاستە هێڵەکەیە.

لەگەڵ تەوەری y . لاری ڕاستەهێڵی ئاسۆیی هەمیشە دەکاتە 0 .

هاوکێشەی ڕاستەهێڵی ئەستوونی بریتییەلە $x=b$ کاتێك b یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکەیە.

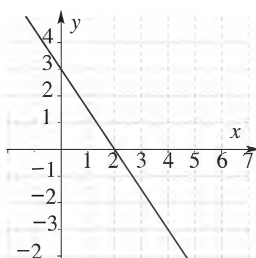
لەگەڵ تەوەری x . لاری ڕاستەهێڵی ئەستوونی پێناسە نەکراوە.

شێوە جیاوازەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ Various Form of the Equation of a Line

ناوی شێوەکە	شێوەی هاوکێشەکە	نموونە
لاری - یەکتربڕین	$y=mx+b$	$y=3x+5$
گشتی	$ax+by=c$	$3x-2y=5$
لاری - خاڵ	$y-y_1=m(x-x_1)$	$y-2=-3(x-1)$
دووخاڵ	$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$	$y-65=\frac{71-65}{7-5}(x-5)$

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا



1. هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە لارییەکەی m و بەخاڵی بنەڕەتدا بڕوات.
2. چۆن ڕاستە هێڵی $y=mx+b$ دەگۆڕێت کاتێك بەهای b بگۆڕێت؟
3. چۆن ڕاستە هێڵی $y=mx$ دەگۆڕێت کاتێك بەهای m بگۆڕێت؟
4. چۆن شێوەی لاری - خاڵ بەکاردەهێنیت بۆ نووسینی هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵی $(1, 1)$ و $(-2, 4)$ دادەڕوات؟
5. ڕوونبیکەوە چۆن هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی وێنەی بەرامبەر دەنووسیت؟
6. چۆن هاوکێشەی $3x+3y+2=0$ بە شێوەی لاری - یەکتربڕین دەنووسیت؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

هاوکێشەی هەر ڕاستەهێڵێك بەشێوەی گشتی بنووسە.

7 $y = 3x + 7$　**8** $2y = 3x - 4$　**9** $3x = -7y - 17$

هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکە بەشێوەی لاری ـ یەکتربڕین بنووسە بەزانینی لارییەکەی وخاڵێك کە پێیدا دەڕوات.

	لاری	خاڵ
10	2	(3, 4)
11	−2	(−3, 4)
12	$\frac{1}{3}$	(3, −4)

هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکە بەشێوەی لاری ـ یەکتربڕین، و بەشێوەی گشتی بنووسە.

13 $y - 50 = 8(x - 4)$　**14** $3y = 9x + 15$　**15** $y = 10(-4x + 3)$

هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکە بەشێوەی لاری ـ یەکتربڕین بنووسە بە زانینی دووخاڵ پێیدا دەڕوات.

16 $(5,-2)$ و $(-2, 5)$　**17** $(-3, 3)$ و $(-4, 4)$　**18** $(3, 2)$ و $(-3, -2)$

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکە لەگەڵ دوو تەوەری پۆوتانەکان دیاریبکە.

19 $y = 4x + 5$　**20** $y = 8x - 1$　**21** $y = -3x + 5$

22 $y = -2x + 13$　**23** $y = 17x - 4$　**24** $y = -5x - 9$

25 $y + x = 10$　**26** $3x - 2y = 12$　**27** $5x + 4y = 12$

28 $4x - 5y = 20$　**29** $2x - 7y = 14$　**30** $9x + y = 18$

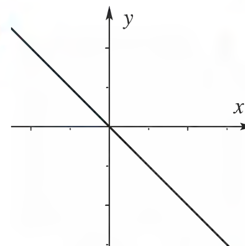
لاری ڕاستەهێڵەکەو یەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری y دیاریبکە، بەبێ وێنەکێشان.

31 $y = -5x$　**32** $y = -5x + 3$　**33** $y = 7$

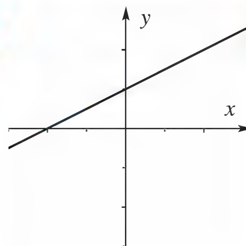
34 $x = 7$　**35** $y = 7 - x$　**36** $y = \frac{1}{3}x - 5$

هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکە بەشێوەی لاری ـ یەکتربڕین بنووسە.

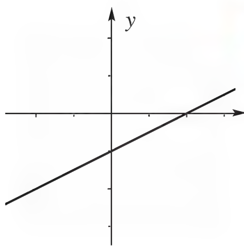
37



38



39



40 لاری ڕاستە هێڵێك چەندە کە هاوکێشەکەی $6x + 2y = 40$ بێت؟

ناتوانرێت هاوکێشەی ڕاستەهێڵ $x = 4$ بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین بنووسرێت چونکە لارییەکەی پێناسە نەکراوە، بەڵام دەتوانرێت بە شێوەی $1 \times x + 0 \times y = 4$ بنووسرێت. ئەم خشتەیە تەواوبکە:

	هاوکێشەی دراو	شێوەی لاری ـ یەکتربڕین	شێوەی گشتی
41	$x = 1$		
42	$y = 4$		
43	$x + y = 5$		
44	$y = 4x$		
45	$x = 4y$		

بەرەنگاری

46 وێنەی هەردوو ڕاستەهێڵی $4x+2y=12$ و $2x+y=10$ بکێشە. چی تێبینی دەکەیت؟

جێبەجێکردن

47 **ژینگە** وا دابنێ بەرزی ئاو لە حەوزێك 35cm ، و ئەو بەرزییە بە تێکڕای 5cm ڕۆژانە زیاد دەبێت. هاوکێشەیەك بنووسە بەرزی ئاوەکە h و ژمارەی ڕۆژەکان d بنوێنێ. ئەم هاوکێشەیە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە. پاش چەند ڕۆژ بەرزی ئاوەکە دەبێتە 260cm ؟

جێبەجێکردن

48 **بازرگانی** نرخی بلیتی چوونە ژوورەوەی ئاهەنگی کۆتایی ساڵی خوێندن 5000 دینارە بۆ گەورەکان و 3000 دینارە بۆ بچووکەکان. هاوکێشەیەك بنووسە دەستکەوتی ئاهەنگەکە بنوێنێ کە دەگاتە 700 000 دینار. بە بەکارهێنانی x بۆ ژمارەی گەورەکان، و y بۆ ژمارەی بچووکەکان. لاری ئەو ڕاستەهێڵە چەندە کە ئەو هاوکێشەیە دەنوێنێ؟ یەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری y چەندە؟



ڕوانین بۆ دواوە

49 ڕێسای هەژمارکردنی چێوەی بازنە p بەپێی نیوە تیرەکەی r بنووسە. لە پاشان ئەم ڕێسایە بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی چێوەی بازنەیەك نیوەتیرەکەی 8cm بێت. ژمارە 3.14 بەکاربهێنە وەك بەهای نزیککراوە بۆ ژمارە π .

خشتەکە بنووسەوە و پاشان تەواوی بکە. کەرتەکان بەسادەترین شێوە بنووسە.

	شێوەی کەرتی	شێوەی دەیی	ژمارەکە وەك ڕێژەی سەدی
50		$0.\overline{3}$	$33\frac{1}{3}\%$
51		0.875	
52			2%
53	$\frac{1}{20}$		
54			$12\frac{1}{2}\%$
55 جێبەجێکردن	$\frac{2}{3}$		
56	$\frac{1}{6}$		
57			0.01%
58		0.80	
59	$\frac{2}{5}$		
60		0.45	
61	5/6		



ڕوانینێك بۆ پێشەوە

62 لە هەمان ڕووتەختی پۆوتاندا دوو ڕاستەهێڵی $y=2.12x-3.7$ و $y=x+5.4$ بکێشە و خاڵەکانی یەکتر بڕینیان دیاریبکە.

وانەی 4

تەریببوون و ئەستوونبوونی ڕاستەهێڵەکان
Parallel and Perpendicular Lines

ئامانجەکان

- تەریبوونی دوو ڕاستەهێڵ یان ئەستوونبوونیان بە بەراوردکردنی لاریەکانیان دەناسێت.
- هاوکێشەی ڕاستەهێڵی تەریب بە ڕاستەهێڵێك یان ئەستوون لەگەڵیدا دەنووسێت.

بۆچی

ناسینی ڕاستەهێڵە تەریبەکان یان ئەستوونەکان لە ڕێگەی بەراوردکردنی لاریەکانیان بە هەنگاوێکی گرنگ دادەنرێت بۆ جیاکردنەوەی پەیوەندی نێوان ڕاستەهێڵەکان بەبێ ئەوەی وێنەکانیان بکێشین

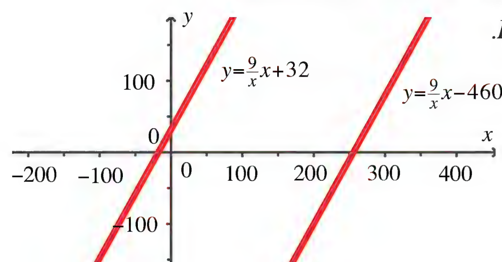
جێبەجێکردن

فیزیا

ئاو بە شێوەی جیاجیا دەردەکەوێت بەپێی پلە گەرمییەکەی. ئاو لە پلەکانی گەرمی زۆر نزم دەیبەستێ وەك لە چیایی بەفریی وێنەکەدا دیارە. یان دەگۆڕێت بۆ هەڵم لە پلەی گەرمی بەرز وەك لەو هەڵمەی لەزەوی بەرزدەبێتەوە دیارە.

	فهرنهایت	سەدی	کالڤن
کولانی ئاو	212	100	373
بەستنی ئاو	32	0	273
سفری ڕووت	−460	−273	0

خشتەی بەرامبەر پلەکانی گەرمی بەسێ پێوانە دیاردەکات، پێوەری فهرنهایت وپێوەری سەدی وپێوەری کالڤن. گۆڕینی پلەی گەرمی لە پێوانی سەدی بۆ پێوانی فهرنهایت بە پێی ئەم یاساییە $F=\frac{9}{5}C+32$ دەبێت و پێوەری کالڤن بۆ پێوەری فهرنهایت بەپێی یاسای $F=\frac{9}{5}K-460$ دەبێت. دەتوانرێت ئەم دوو هاوکێشەیە بنووسینەوە بە لە جیاتیدانانی y لە بری F و x لە بری C یان K.



$y=\frac{9}{5}x+32$ ، $y=\frac{9}{5}x-460$ سەرنجبدە ئەو دوو ڕاستەهێڵەی دوو هاوکێشەکە دەنوێنن کە تەریبن و لارییان یەکسانە.

Parallel Lines   ڕاستەهێڵە تەریبەکان

ئەگەر لاری دوو ڕاستەهێڵ یەکسانبوون ئەوا تەریب دەبن.

ئەگەر دووڕاستەهێڵی نائەستوون تەریببوون ئەوا لاریەکانیان یەکسان دەبن.

نموونە 1

بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین هاوکێشەی ڕاستە هێڵێك بنووسە تەریبە بە ڕاستەهێڵی $y = 3x - 7$ و تەوەری y لە 4 دا دەبڕێت.

شیکار

لاری ئەو ڕاستەهێڵە دەکاتە 3 . لەبەر ئەوەی تەوەرەی y- لە 4 دا دەبڕێت ئەوا هاوکێشەکەی دەبێتە $y = 3x + 4$.

هەوڵبدە

بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە تەریبە بە ڕاستەهێڵی $y = 0.5x + 5$ و تەوەری y لە 2- دا دەبڕێت.

لەبیرت بێت دوو ڕاستەهێڵ ئەستوون دەبن ئەگەر یەکتریان بڕی و گۆشەی وەستاویان پێکهێنا.

لەم چالاکییەی دادێت پەیوەندی نێوان لارییەکانی دوو ڕاستەهێڵی ئەستوون دەدۆزیتەوە.

چالاکی

دۆزینەوەی پەیوەندی نێوان ئەستوون بوونی ڕاستەهێڵەکان ولاریەکانیان
Explorer Relation between Slope of Perpendicular Lines

لەم چالاکییەدا پێویستمان بە ڕاستەی ستوونی و کاغەزی ڕوونکردنەوەیی هەیە کە دوو تەوەری ڕووتەختی پۆوتانی لەسەر کێشرابێت.

1. ئایا دوو ڕاستەهێڵی $y = -2x + 3$ و $y = 0.5x - 2$ یەکتردەبڕن؟ ئەوە ڕوونبکەوە.
2. ئەو دوو ڕاستە هێڵە لە هەمان ڕووتەختی پۆوتاندا بکێشە وبەڕوونکردنەوەیی پۆوتانی خاڵی یەکتربڕینیان دیاربکە.
3. بەڕای تۆ پەیوەندی نێوان دوو ڕاستەهێڵەکە چییە؟ ڕاستەی وەستاو بۆ ساغکردنەوەی وەڵامەکەت بەکاربهێنە.
4. لاری ڕاستەهێڵی یەکەم ولاری ڕاستەهێڵی دووەم لێکبدە، ئەنجامی لێکدانەکە چیە؟

Perpendicular Lines   ئەستوونبوونی ڕاستەهێڵەکان

ئەگەر ئەنجامی لێکدانی لاری دوو ڕاستەهێڵ بکاتە -1 ، ئەوا ئەستوون دەبن.

ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ ئەستوون بن ئەوا ئەنجامی لێکدانی لارییەکانیان دەکاتە -1 .

نموونە 2

بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین، هاوکێشەی ئەو ڕاستە هێڵە بنووسە کە تەوەری دووەم لە 4 دا دەبڕێت و لەگەڵ ڕاستە هێڵی $y = 3x + 2$ ئەستوونە.

شیکار

لاری ڕاستە هێڵەکە دەکاتە $-\frac{1}{3}$ چونکە ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y = 3x + 2$ کە لارییەکەی بریتییە لە 3 . هاوکێشە داواکراوەکە دەکاتە $y = -\frac{1}{3}x + 4$.

هەوڵبدە

بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە کە تەوەری دووەم لە 6 دا دەبڕێت و لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y = 4x + 2$ ئەستوونە.

نموونە 3

بە شێوەی لاری ـ خاڵ، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە بە خاڵی $(4,5)$ دا دەڕوات و لەگەڵ ڕاستەهێڵی $2x+3y=7$ ئەستوونە.

شیکار

دەسبکە بە نووسینی هاوکێشەی ڕاستە هێڵە دراوەکە بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین: $y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$

دەبێت لاری ئەو ڕاستەهێڵەی ئەستوونە لەگەڵی بکاتە $\frac{3}{2}$. و لەبەر ئەوەی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بەشێوەی لاری ـ خاڵ دەکاتە $y-y_1=m(x-x_1)$ ئەوا هاوکێشە داواکراوەکە دەکاتە $y-5=\frac{3}{2}(x-4)$

هەوڵبدە بە شێوەی لاری ـ خاڵ هاوکێشەی ئەو ڕاستە هێڵە بنووسە بە خاڵی $(3,-2)$ دەڕوات و ئەستوونە لەگەڵ ڕاستە هێڵی $4x-2y=-6$.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. ڕوونیبکەوە چۆن هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك تەریب بە ڕاستە هێڵی $y=4x+3$ دەنووسی.
2. ڕاستەهێڵێك لاریەکەی $\frac{2}{3}$. ڕوونیبکەوە چۆن لاری ڕاستەهێڵێکی ئەستوون لەسەری دەدۆزیتەوە؟
3. چۆن لاری ڕاستەهێڵی ئەستوون لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=\frac{1}{3}x+2$ دیاریدەکەیت؟
4. ڕوونیبکەوە چۆن هاوکێشەی ڕاستەهێڵێکی ئەستوون لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=4x+3$ دەدۆزیتەوە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین، هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە، تەوەری y لە 5 دا دەبڕێت و تەریبە بەڕاستەهێڵە دراوەکە.

5. $y=2x+3$
6. $y=-3x$
7. $4y=x$
8. $y=-6x+2$

بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین، هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە، تەوەری y لە 5 دا دەبڕێت و ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵە دراوەکە.

9. $y=3x-3$
10. $y=-3x$
11. $5y=x$
12. $-6y=x$

بە شێوەی لاری ـ خاڵ، هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە، بەخاڵی $(4,5)$ دا دەڕوات و ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵە دراوەکە.

13. $2x+3y=4$
14. $x-3y=8$
15. $-2x-8y=16$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

لاری هەریەك لەو ڕاستەهێڵانە دیاریبکە.

16. $y=4x+10$
17. $3x+y=7$
18. $10=-5x+2y$
19. $4x-3y=12$
20. $y=\frac{1}{3}x-3$
21. $3x-y=7$

22 $2x-y=14$ — 23 $3x+2y=51$ — 24 $13=20x-5y$

25 $3y=-4x+2$ — 26 $\frac{2}{3}x+6y=1$ — 27 $4x+\frac{1}{4}y=8$

لاری راستەهێڵی ئەستوون لەگەڵ ڕاستەهێڵی دراو دیاریبکە.

28 $y=-\frac{1}{3}x+10$ — 29 $-\frac{1}{2}x-y=20$ — 30 $13=-x+y$

31 $3x+12y=12$ — 32 $y=5x+10$ — 33 $3x+y=2$

34 $20=-5x+2y$ — 35 $4x+4y=12$ — 36 $2y=5x+11$

37 $-4x+8y=17$ — 38 $12x+3y=10$ — 39 $4y=20x-3$

بە شێوەی گشتی، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە بە خاڵی (2، 3) دا دەڕوات وتەریبە بە ڕاستەهێڵە دراوەکە.

40 $x+y=1$ — 41 $3x=7y+2$ — 42 $y=2x-3$

43 $3y=2x$ — 44 $7x-2y=10$ — 45 $11=3y+2x$

بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین،هاوکێشەیەك بنووسە بۆ ئەو ڕاستەهێڵەی بەم پێدراوانە دیاریکراوە.

	دەڕوات بە	تەریب بە ڕاستەهێڵ
46	(3, –5)	$5x-2y=10$
47	(–2, 7)	$y=3x-4$
48	(2, 4)	$y=7$
49	(2, –4)	$y=3x-4$
50	(–1, 4)	$y=2x+5$

	دەڕوات بە	ئەستوون لەگەڵ ڕاستەهێڵ
51	(3, –3)	$5x+2y=10$
52	(2, 7)	$y=3x-4$
53	(2, –4)	$y=7$
54	(–2, 4)	$3x+y=5$
55	(–1, 4)	$y=2x-5$

وێنەی ڕاستە هێڵی $y=5x$ بکێشە.

56 ڕاستە هێڵێك تەریب بە ڕاستەهێڵی $y=5x$ بکێشەو هاوکێشەکەی بنووسە.

57 ڕاستەهێڵێك ئەستوون لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=5x$ بکێشە و هاوکێشەکەی بنووسە.

دەتوانیت دەربارەی لاری هەریەکە لەو ڕاستە هێڵانە چی بڵێیت؟

58 تەریب بێت بە ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی. — 59 ئەستوون بێت لەگەڵ ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی.

60 تەریب بێت بە ڕاستەهێڵێکی ئەستوونی. — 61 ئەستوون بێت لەگەڵ ڕاستەهێڵێکی ئەستوونی.

بەستنەوە

ئەندازە هاوکێشەی چوار ڕاستەهێڵ بنووسە کە یەکتریان بڕیبێت بۆ ئەوەی چوار گۆشەیەك پێکبهێنن، کەلاکانی:

62 بەدوو تەوەری پۆوتانەکان تەریب بن.

63 بەدوو تەوەری پۆوتانەکان تەریب نەبن.

64 ئەندازە یەکێك لە لایەکانی چوارگۆشەیەك دەکەوێتە سەر ڕاستە هێڵی $y=\frac{3}{4}x+5$.
هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵانە بنووسە کە دەشێت لایەکانی تری چوارگۆشەکە بکەونە سەری.

جێبەجێکردن

65 **فیزیا**: یاسایەك بنووسە بۆ گۆڕینی پلەکانی گەرمی لە پێوانەی فەرنهایت بۆ پێوانەی سەدی. یاسایەکی تر بۆ گۆڕینی پێوانەی فەرنهایت بۆ پێوانەی کالڤن. ئەو دوو یاسایە لە شێوەی دوو هاوکێشە بنووسە، بە بەکارهێنانی x بۆ پلەکانی گەرما بە پێوانەی فەرنهایت، و y بۆ پلەکانی گەرما بە پێوانەی کالڤن، یان پێوانەی سەدی، وێنەی دوو ڕاستە هێڵکە بکێشە.

$y=\frac{9}{5}x+32$ ، $y=\frac{9}{5}x-460$

هاوکێشەی $y=\frac{9}{5}x+32$ لە پێوانەی سەدی بۆ پێوانەی فەرنهایت دەگۆڕێت و هاوکێشەی $y=\frac{9}{5}x-460$ لە پێوانەی کالڤن بۆ پێوانەی فەرنهایت دەگۆڕێت.

بەرەنگاری

66 پەیوەندی نێوان دوو ڕاستەهێڵەکەی پرسیاری 65 چییە؟ لاری هەریەکەیان بنووسە.

67 پەیوەندی نێوان دوو ڕاستەهێڵەکەی پرسیاری 65 و ئەو دوو ڕاستە هێڵەی کە گۆڕان دەنوێنن لە پێوانەی کالڤن وسەدی بۆ پێوانەی فەرنهایت، چییە؟

ڕوانین بۆ دواوە

تاقیکردنەوەی ڕاستەهێڵی ئەستوونی بەکاربهێنە بۆ بڕیاردان ئەگەر ئەم وێنە ڕوونکردنەوانەی خوارەوە، نەخشە دەنوێنن یان نا؟

68 **69** **70**

ڕوانین بۆ پێشەوە

چەند جووتە ڕێکخراو شیکاری سیستەمی دوو هاوکێشەی هێڵی بە دوو گۆڕاو پێکدەهێنن، ئەگەر ئەو دوو ڕاستە هێڵەی کە دوو هاوکێشەکە دەنوێنن.

71 تەریب بن؟

72 ستوون بن؟

وانەی 5

نەخشە دووجاکان Quadratric Functions



بۆچی

دەتوانیت زۆر لە بارەکانی ژیانی ڕۆژانە بە برە دووجاکان بنوێنیت، نموونە بۆ ئەوەش: ئەو ماوەیەی ئۆتۆمبێلێك دەیبڕێت کە شوفێرەکەی هەوڵی ڕاگرتنی دەدات لەو کاتەی تێبینی ڕێگرێك دەکات تا بە تەواوی دەیوەستێنێت.

ئامانجەکان

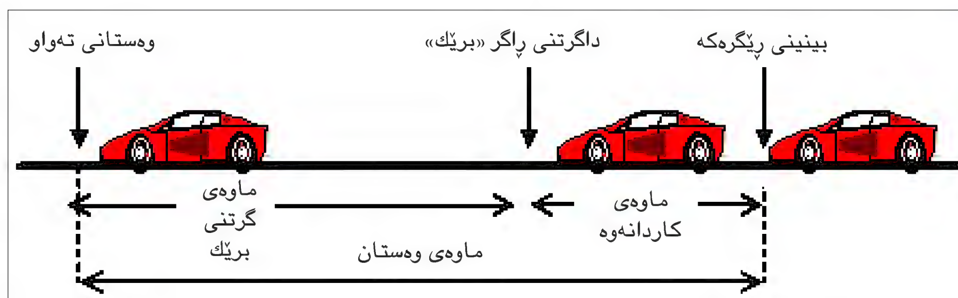
- نەخشەی دووجا $f(x) = ax^2 + bx + c$ دەناسێت و بەڕوونکردنەوەیی دەینوێنێت.
- وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە دووجاکان دەنوێنێت وناوی (برگەی هاوتا) بۆ ڕوونکردنەوەکەی بەکاردەهێنێت.
- سەری برگە هاوتاو تەوەرەکەی دەناسێت.
- ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لە کەمبوونی نەخشە بە ڕوونکردنەوەیی دیاریدەکاتa
- بەپێی نیشانەی هاوکۆڵکەی ڕووی کرانەوەی برگە هاوتا

جێبەجێکردن

فیزیا

برە دووجاکان Quadratic Expressions

ئەو دوورییەی کە ئۆتۆمبێلێك دەیبڕێت لە کاتی تێبینیکردنی شوفێرەکەی بۆ ڕێگرێك تا وەستانی بە تەواوەتی لە دوو دووری پێکدێت وەك لەم وێنەدا دیارە:



دەتوانین دووری پێویست بۆ وەستاندنی ئۆتۆمبێلەکە بەم برە جەبریە دەربڕین: $d(x) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{160}x^2$

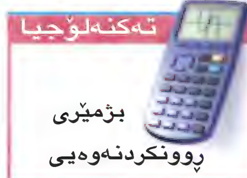
کاتێك x خێرایی ئۆتۆمبێلەکەیە لە کاتی بینینی ڕێگرەکە (بە کم/ کاتژمێر)

$d(x)$ دووری وەستان بەتەواوەتی (بەمەتر) دەنوێنێت. بری $d(x)$

لە سەرجەمی بری $\frac{1}{5}x$ کە دووری کاردانەوەکەیە و بری $\frac{1}{160}x^2$ کە دووری گرتنی برێکەکە دەنوێنێ. ئەگەر خشتەی بەهاکان بۆ بری $d(x)$ بە هۆی بژمێری ڕوونکردنەوەیی پێکبهێنیت، تێبینی دەکەیت کە دووری پێویست بۆ وەستاندن 25m بەنزیکی دەبێت کاتێك خێرایی 50km/h بێت، و نزیکەی 82m دەبێت کاتێك خێرایی 100km/h بێت، بەمەش تێبینی دەکەیت کە دووری پێویست بۆ وەستان زیاتر لە 3 ئەوەندە زیاد دەکات کاتێك خێرایی دوو ئەوەندە زیاد بکات.

X	Y1
0	0
10	2.625
20	6.5
30	11.625
40	18
50	25.625
60	34.5

X=0



بیری ڕەخنەگر

ئایا پەیوەندی نێوان خێرایی x و دووری وستان d پەیوەندییەکی هێڵییە؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

Quadratic Expressions   بڕە دووجاکان

بڕە دووجاکان ئەو بڕانەن کە بە شێوەی ax^2+bx+c دەنووسرێن کاتێك a ، b ، c ژمارەی ڕاستین و $a \neq 0$ بە a ، b ، c دەوترێت **هاوکۆڵکەکانی** ***Coefficients*** بڕە دووجاکە.

سادەترین بڕی دووجا بریتییە لە بڕی x^2. بە شێوەیەکی گشتی، ئەگەر بڕێکی هێڵی لە بڕێکی هێڵی تر بدەیت ئەوا بڕێکی دووجات دەستدەکەوێت وەك لەم چالاکییەدا دەبینرێت.

چالاکی 1

Quadratic and Linear Expressions   بڕە دووجاکان و بڕە هێڵییەکان

1. ئەم خشتەیە تەواو بکە.

ئەنجامی لێکدانی هەردوو بڕەکە	بڕی دووەم	بڕی یەکەم
$(2x-2)(2x+1)=4x^2-2x-2$	$2x+1$	$2x-2$
	$x+1$	$x+1$
	$-2x+1$	$2x$
	$0.5x+1$	$-x+2$

2. هاوکۆڵکەکانی بڕە دووجاکە لە هەربارێکی پرسیاری پێشوو دیاربکە.

Quadratic Functions   نەخشە دووجاکان

لەوانەی دووەمی ئەم بەشەدا نەخشە هێڵییەکان فێربوویت، لەم بەشەدا جۆرێکی نوێ لە نەخشەکان فێردەبیت کە نەخشە دووجاکانە. لە بیرت بێت شێوەی گشتی نەخشەی هێڵی بریتییەلە $f(x)=mx+b$. ئەویش بە بڕێکی جەبری هێڵی پێناسەکراوە، بەڵام نەخشەی دووجا بە بڕێکی دووجا پێناسە دەکرێت.

Quadratic Function   نەخشەی دووجا

نەخشەی دووجا نەخشەیەکە ڕێساکە بەهۆی بڕێکی دووجای یەك گۆڕاو دەنووسرێت. بەم شێوەیە $f(x)=ax^2+bx+c$ کاتێك a ، b ، c ژمارەی ڕاستین و $a \neq 0$. بە a ، b ، c دەووترێت هاوکۆڵکەکانی نەخشە دووجاکە.

سادەترین شێوەی نەخشە دووجاکان نەخشەی $f(x)=x^2$. دەتوانرێت هەموو نەخشەیەکی دووجا لەم نەخشەیەوە پێکبهێنرێت بە بەکارهێنانی جێگۆڕکێی سادە یان ئاوێتە. هەر لەبەر ئەم هۆیەشە بە نەخشەی بنەڕەتی «دایك» دادەنرێت بۆ هەموو نەخشە دووجاکان. نەخشەی $d(x)=\frac{1}{5}x+\frac{1}{160}x^2$ نموونەیەکی نەخشەی دووجایە.

بیری ڕەخنەگر هاوکۆڵکەکانی نەخشە دووجایەکەی دووری ڕاوەستانی ئۆتۆمبیلەکە دەنوێنێ، کامانەن؟

نمـــوونـــه 1

ڕوونیبکەوە کە نەخشەی $f(x)=(2x-1)(3x+5)$ نەخشەیەکی دووجایە، و هاوکۆڵکەکانی a و b و c دیاریبکە.

شیکار

ڕێگای یەکەم

$$f(x)=(2x-1)(3x+5)$$
$$=2x(3x+5)-(3x+5)$$
$$=6x^2+10x-3x-5$$
$$=6x^2+7x-5$$

ڕێگای دووەم

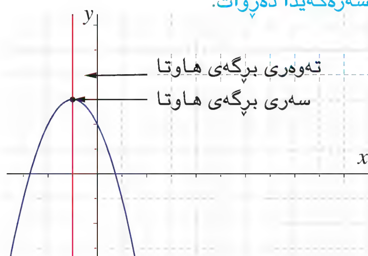
$$f(x)=(2x-1)(3x+5)$$
$$=(2x-1)3x+(2x-1)5$$
$$=6x^2-3x+10x-5$$
$$=6x^2+7x-5$$

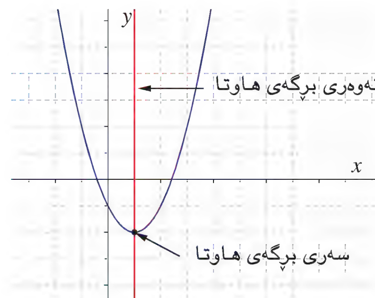
لەبەر ئەوەی $f(x)=6x^2+7x-5$ نەخشەیەکی دووجایە و هاوکۆڵکەکانی بریتییەلە $a=6$ ، $b=7$ ، $c=-5$.

هەوڵبدە ڕوونیبکەوە کە نەخشەی $f(x)=(2x-5)(x-2)$ نەخشەیەکی دووجایە و هاوکۆڵکەکانی دیاریبکە.

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی دووجا ناوێکی تایبەتی هەیە ئەویش **بڕگەی هاوتایە** ***Parabola*** . ئەم وێنانەی خوارەوە دووجۆر لە بڕگەی هاوتا پیشان دەدەن.

تێبینی بکە کە تەوەری بڕگە هاوتاکە هەمیشە بە سەرەکەیدا دەڕوات.





تێبینی بکە کە هەر بڕگە هاوتایەك خاڵێکی ناسراوی هەیە پێی دەووترێت **سـەر** ***Vertex*** ، و تەوەرێکی هاوجێبوونی هەیە کە بۆ دووبەشی جووتبوو بەشی دەکات. هەروەها تێبینی ئەوە بکە سەر لە وێنەی نەخشەدووجاکە، گەورەترین یان بچووکترین بەهای نەخشەکە دەگەیێنێت. ئەگەر لە نەخشە دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ ووردبیتەوە، بۆت دەردەکەوێ کە بەهای $f(x)$ هەژمار دەکرێت بەهای x هەر چەند بێت. ئەوەش ئەوە دەگەیەنێت کە بواری نەخشەی دووجا یەکسانە بە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان بەتەواوی. بەڵام مەوداکەی هەروەکو لە دوو وێنەکەی پێشوودا دیارە. بریتییەلە کۆمەڵەی ئەو ژمارە ڕاستییانە کەمتر نین لە بچووکترین بەهای نەخشەکە (لەجۆری یەکەم)، و یان کۆمەڵەی ئەو ژمارە ڕاستییانەی کە لە گەورەترین بەهای نەخشەکە زیاترنین (لەجۆری دووەم).

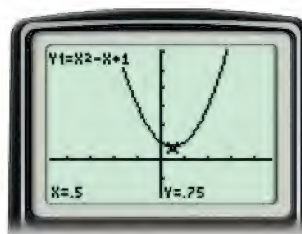
نموونە 2

ئایا سەری ئەم نەخشە دووجایە $f(x)=x^2-x+1$ گەورەترین یان بچووکترین بەها دەنوێنێت؟ دەتوانیت بژمێری ڕوونکردنەوەیی یان خشتەی بەهاکان بەکاربهێنیت.

شیکار

ڕێگای یەکەم

دەتوانیت بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکار بهێنیت بۆ ئەوەی بۆت دەربکەوێت کە نەخشەکە بچووکترین بەهای هەیە.



ئەگەر بەدوای هێڵە چەماوەکەیدا بچیت بۆت دەردەکەوێت کە پۆوتانی سەرەکەی $(0.5, 0.75)$

ڕێگای دووەم

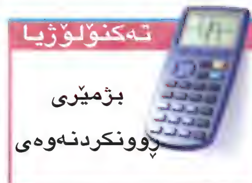
دەتوانیت بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکار بهێنیت بۆ دروستکردنی خشتەی بەهاکان بۆ نەخشەکە. لە خشتەکەدا ڕووندەبێتەوە کە نەخشەکە دەگاتە بچووکترین بەهاکەی کاتێك بەهای x، 0.5 دەبێت، و ئەم بچووکترین بەهایەش بریتییە لە 0.75.

X	Y1
-2.00	7.00
-1.50	4.75
-1.00	3.00
-.50	1.75
0.00	1.00
.50	.75
1.00	1.00

X=.5

لەم خشتەیە دەردەکەوێت کە سەری برگە هاوتاکە خاڵی $(0.5, 0.75)$.

تەکنۆلۆژیا



بژمێری ڕوونکردنەوەی

هەوڵبدە

ئایا سەری نەخشە دووجای $f(x)=-2x^2-4x+1$ گەورەترین یان بچووکترین بەها دەنوێنێت؟

دەتوانیت بە سەرنجدان لەنیشانەی هاوکۆڵکەی a، بزانیت کەنەخشە دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ بەهای گەورەترین یان بچووکترینی هەیە.

بەهای گەورەترین یان بچووکترین؟ **Maximum and Minimum values**

- ڕوونکردنەوەی نەخشەی دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ کاتێك a و b و c ژمارەی ڕاستین و $a \neq 0$ بریتییەلە برگەی هاوتا.
- ئەگەر a ، هاوکۆڵکە ی x^2 موجەب بێت ئەوا برگە هاوتاکە کراوەیە ڕووەو سەرەوە. و سەرەکەی نزمترین خاڵی برگەکەیە. پۆوتانی دووەمی خاڵەکەش **بچووکترین بەهای Minimum Value** نەخشەکەیە.
- ئەگەر a ، هاوکۆڵکەی x^2 سالب بێت ئەوا برگە هاوتاکە کراوەیە ڕووەو خوارەوە. و سەرەکەی بەرزترین خاڵی برگەکەیە. پۆوتانی دووەمی خاڵەکەش **گەورەترین بەهای Maximum Value** نەخشەکەیە.
- پۆوتانی دووەمی سەری برگەی هاوتا **ئەوپەڕی بەها Extremum Value** دەنوێنێت بۆ نەخشە دووجاکە. ئەوپەڕی بەهاکەیش گەورەترین یان بچووکترین بەهایە.

نموونە 3

ئەم برگە هاوتایانە ڕووەو سەرەوە یان خوارەوە ڕووە و کراوەن؟ ئایا سەرەکەشی گەورەترین یان بچووکترین بەها دەنوێنێت؟

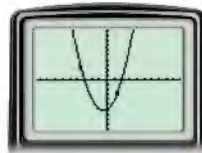
أ $f(x)=x^2+x-6$

ب $f(x)=5+4x-x^2$

شیکار

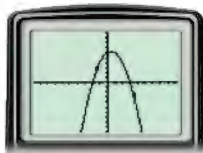
أ هاوكۆلكەی x^2 لە نەخشەی $f(x) = x^2 + x - 6$ بریتییە لە 1 . وە لەبەر ئەوەی موجەبە ئەوا برگە هاوتاكە كراوەیە بۆ سەرەوەو نەخشەكە بچووكترین بەهای هەیە لە سەرەكەیدا.

پاسەدان بكە



ب هاوكۆلكەی x^2 لە نەخشەی $f(x) = 5 + 4x - x^2$ بریتییە لە -1. وە لەبەر ئەوەی سالیبە ئەوا برگە هاوتاكە كراوەیە بۆ خوارەوەو نەخشەكە گەورەترین بەهای هەیە لە سەرەكەیدا.

پاسەدان بكە



چالاكی 2

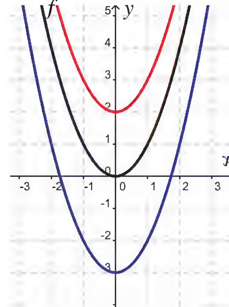
جێگۆڕكێی نەخشەی دووجای بنەڕەتی (دایك) Transforming Quatratic Parent Function

پێویستیت بە پەڕەی ڕوونكردنەوەیی یان بژمێری ڕوونكردنەوەیی دەبێت.

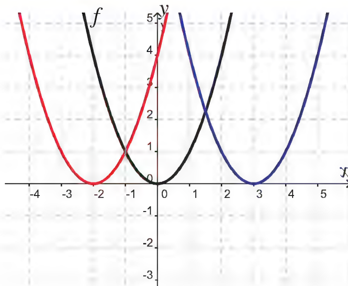
1. خشتەی بەهاكان دروستبكە، پاشان ڕوونكردنەوەی هەر نەخشەیەك بكێشە.
   $y = x^2$ $\quad y = x^2 + 1$ $\quad y = x^2 - 1$
2. چ گۆڕانێك بەسەر ڕوونكردنەوەی نەخشەی بنەڕەتی دادێت، ئەگەر **1** مان بۆ زیادكرد یان لێدەركرد لە نەخشەكەی؟
3. خشتەی بەهاكان دروستبكە، پاشان ڕوونكردنەوەی هەر نەخشەیەك بكێشە.
   $y = x^2$ $\quad y = (x + 2)^2$ $\quad y = (x - 2)^2$
4. چ گۆڕانێك بەسەر ڕوونكردنەوەی نەخشەی بنەڕەتی دادێت، ئەگەر 2 مان بۆ زیادكرد یان لێدەركرد بۆ گۆڕاوی ئازاد x .
5. خشتەی بەهاكان دروست بكە، پاشان ڕوونكردنەوەی هەر نەخشەیەك بكێشە.
   $y = x^2$ $\quad y = (x - 2)^2 + 1$ $\quad y = (x - 2)^2 - 1$ $\quad y = (x + 2)^2 + 1$
6. چ گۆڕانێك بەسەر ڕوونكردنەوەی نەخشەی بنەڕەتی دادێت، كاتێك 2 لە x دەربكەیت و 1 بۆ نەخشەكە زیادبكرێت؟ و كاتێك 2 بۆ x زیاد بكرێت و 1 لە نەخشەكە دەربكەیت.

خاڵی چاودێری √

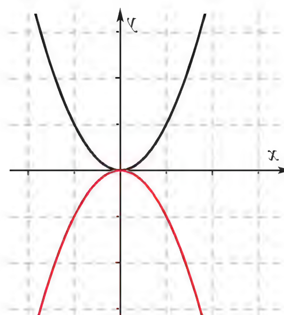
خاڵی چاودێری √



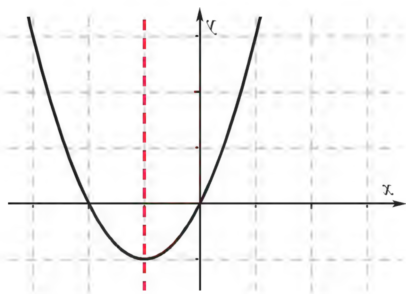
هەریەك لە دوو نەخشەی $y = x^2 + 2$ و $y = x^2 - 3$ كشانەوەیەكی ستوونی **Vertical Translation** بۆ ڕوونكردنەوەی نەخشەی بنەڕەتی $y = x^2$ دەنوێنن. كاریگەری زیادكردنی ژمارەیەك بۆ نەخشەكە یان دەركردن لێی، ڕوونكردنەوەی نەخشەكە بۆ سەرەوە یان بۆ خوارەوە ڕادەكێشێت.



هەر یەك لە دوو نەخشەی $y = (x + 2)^2$ و $y = (x - 3)^2$ كشانەوەیەكی ئاسۆیی **Horizontal Translation** بۆ ڕوونكردنەوەی نەخشەی بنەڕەتی $y = x^2$ دەنوێنن. كاریگەری زیادكردنی ژمارەیەك بۆ گۆڕاوی ئازاد یان دەركردن لێی، ڕوونكردنەوەی نەخشەكە بۆ لای چەپ یان لای ڕاست ڕادەكێشێت.



هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y = -x^2$ وێنەدانەوەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بنەڕەتییە بە دەوری تەوەری x بەڵام سەری برگە هاوتاکە بچووکترین بەهای نەخشە دووجای بنەڕەت دەنوێنێت، و هەمان سەر گەورەترین بەهایە بۆ نەخشەی $y = -x^2$.



ئەو ڕاستەهێڵە ستوونییەی کە بەسەری برگە هاوتاکەدا دەڕوات تەوەری هاوجێبوونی وێنە ڕوونکردنەوەییەکەیە، لەبەر ئەوەی ئەو ڕاستەهێڵە برگە هاوتاکە دەکات بە دووبەشی جووتبوو، بەڕاستەهێڵەکەشی دەووترێت تەوەری برگە هاوتاکە **Axis of Symmetry** .

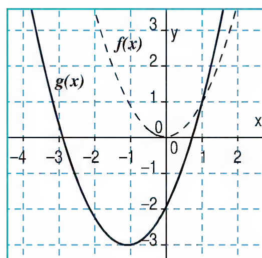
نموونە 4

جێگۆڕکێی ڕوونکردنەوەی نەخشەی دووجا

چۆن جێگۆڕکێی نەخشەی دووجای بنەڕەتی $f(x)=x^2$ پێ دەکەی بۆ بەدەستهێنانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە.

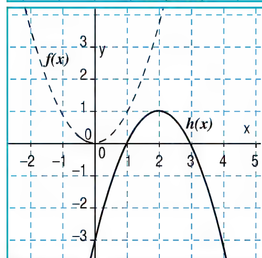
أ $g(x)=-(x+1)-3$

بەپێی ڕاکێشانی یەك یەکە بۆلای چەپ و 3 یەکە بۆ خوارەوە.



ب $h(x)=-(x-2)+1$

بەپێی ڕاکێشانی 2 یەکە بۆلای ڕاست و لەدوایدا وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەری x، پاشان ڕاکێشانی بۆ سەرەوە یەك یەکەك.



هەوڵبدە چۆن جێگۆڕکێی ڕوونکردنەوەی نەخشەی دووجای بنەڕەتی $f(x)=x^2$ دەکەیت بۆ بەدەستهێنانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە.

أ $g(x)=(x-2)+4$

ب $h(x)=(x+3)-2$

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. جیاوازی نێوان ڕوونکردنەوەی نەخشەی هێڵی و ڕوونکردنەوەی نەخشە دووجا ڕوونبکەوە.
2. جیاوازی نێوان بڕی جەبری نەخشەی هێڵی و بڕی جەبری نەخشەی دووجا ڕوونبکەوە.
3. چۆن دەزانیت سەری برگەی هاوتا بچووکترین بەها یان گەورەترین بەها بۆ نەخشە دووجاکە دەنوێنێت.
4. پەیوەندی چییە لە نێوان ڕوونکردنەوەی نەخشەی بنەڕەتی و ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y = x^2 - 8$؟
5. پەیوەندی چییە لەنێوان ڕوونکردنەوەی نەخشەی بنەڕەتی و ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y = (x-8)^2$؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ڕوونیبکەوە کە نەخشەکە نەخشەیەکی دووجایە و هاوکۆڵکەکانی دیاریبکە.

6 $f(x)=(x+1)(x-7)$ **7** $f(x)=(x+2)(x+5)$ **8** $f(x)=(2x+5)(3x+1)$

گەورەترین بەها یان بچووکترین بەها؟ لە ڕاهێنانەکانی 9 تا 14 وەڵامی ئەپرسیارانە بدەوە:

أ ئایا برگە هاوتاکە ڕووەو سەرەوە یان ڕووەو خوارەوە کراوەتەوە؟

ب ئایا ئەو پەڕی بەهای نەخشەکە گەورەترین بەهایە یان بچووکترین بەهایە؟

9 $f(x)=x^2-3x+5$ **10** $f(x)=2-3x-x^2$

11 $f(x)=x^2+5x+3$ **12** $f(x)=x^2-2x+7$

13 $f(x)=-x^2+8x+14$ **14** $f(x)=-2x^2-5x+1$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ڕوونیبکەوە کە نەخشەکە نەخشەیەکی دووجایەو هاوکۆڵکەکانیش دیاریبکە.

15 $f(x)=(x-3)(x+8)$ **16** $f(x)=(4-x)(7+x)$

17 $f(x)=-(x-2)(x-6)$ **18** $f(x)=(2x+3)(4-x)$

19 $f(x)=x(x-3)$ **20** $f(x)=(x-6)(x+6)$

ئایا نەخشەکە دووجایە یان نا؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

21 $y=3-x^2$ **22** $y=3-x$

23 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}$ **24** $y=\frac{2x^2+5}{x+3}$

25 $y=x^2-x^2(x+7)$ **26** $y=\left|x^2+5x-2\right|$

ئایا برگە هاوتاکە ڕووەو سەرەوە یان ڕووەو خوارەوە کراوەتەوە؟ ئایا ئەوپەڕی بەهای نەخشەکە بچووکترین بەهایە یان گەورەترین بەها؟

27 $y=2x^2-2x$ **28** $y=-8x^2-x$

29 $y=3-x^2$ **30** $y=4-x^2-2x$

چۆن ڕوونکردنەوەی نەخشەی بنەڕەتی جێگۆڕکێ پێ دەکەی بۆ بەدەستهێنانی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشانە؟

31 $y=(x-2)^2-1$ **32** $y=(x-5)^2-2$

33 $y=-(x-2)^2+1$ **34** $y=-(x+6)^2-2$

35 $y=-(x-3)^2-2$ **36** $y=(x+4)^2-7$

37 جێگۆڕکێ ڕوونکرنەوەی نەخشەکە بکێشە و پاشان وەڵامی ئەم پرسیارانە بدەوە.

أ $y=(x+2)(x-4)$ ب $y=2(x+2)(x-4)$

ج $y=\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$ د $y=-(x+2)(x-4)$

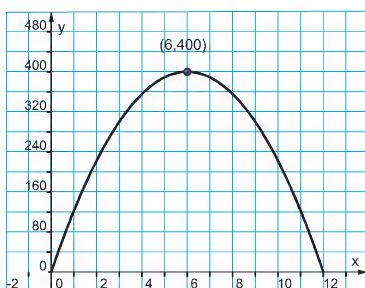
هـ $y=-2(x+2)(x-4)$ و $y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$

- ئەم شەش ڕوونکردنەوەییانە لە چیدا هاوبەشن؟
- کامیان ڕووەو خوارەوە کراوەتەوە؟
- کامیان ڕووەو سەرەوە کراوەتەوە؟



جێبەجێکردنەکان

فیزیا: هێڵی ڕوونکردنەوەی بەرامبەر پەیوەندی نێوان کات بە چرکە وبەرزی گوللە تۆپێك بە مەتر بۆ سەرەوە هەڵدراوە دەنوێنێت.



38 ئەوپەڕی بەرزی چەندە کە گوللە تۆپەکە دەیگاتێ؟

39 بە چەند چرکە دەگاتە ئەوپەڕی بەرزی؟ تەوەری ڕوونکردنەوەییەکە دیاریبکە.

40 **فیزیا**: جوامێر تیرێکی بۆ سەرەوە بە خێرایی 40 مەتر لە چرکەیەك هاوێشت، بەرزی تیرەکە دوای 5 چرکە چەندە بە بەکارهێنانی نەخشەی $y = 40x - 5x^2$ ، کاتێك x کات بێت بە چرکەو y بەرزی بێت بە مەتر. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە دە نزیکبکەوە.

 ڕوانین بۆ دواوە

بڕی $2(x-3)^2+1$ لێکدان و کرداری لێدەرکردن لەناو کەوانەکە و بەرزکردنەوەی بۆ توانی 2 و کرداری کۆکردنەوە لەخۆدەگرێت.

41 کام لەم کردارانە یەکەمجار ئەنجام دەدرێت؟

42 دووەمجار کامیان ئەنجام دەدەیت؟

43 سێیەمجار کامیان ئەنجام دەدەیت؟

هەر هاوکێشەیەك بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین بنووسە، پاشان ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە.

44 $2x + 5y = 14$

45 $x = -\frac{1}{2}y = 4$

 ڕوانین بۆ پێشەوە

46 لەهەمان ڕووتەختی پۆتانەکاندا، ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشانە بکێشە:
$y = x^2 - 3x + 5$ و $y = x^2 + 7x + 6$ و $y = x^2 - 14x + 49$ ، ژمارەی خاڵە هاوبەشەکانی نێوان تەوەری x لەگەڵ هەریەکە لەو برگە هاوتایانە چەندە؟

سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان

Systems Of Linear Equations

بەشی

3



وانەکان

1. شیکارکردنی سستەمی هێڵی بە لەجیاتیدانان
2. شیکارکردنی سستەمی هێڵی بەلابردن
3. شیکارکردنی سستەمی هێڵی بەڕوونکردنەوەیی

ساڵنامەکانی ڕزگارکردن
دەتوانین سستەمی هاوکێشە هێڵییەکان بەکاربێنین بۆ پلاندانانی کرداری چاپکردن و فرۆشتنی ساڵنامەکان بۆ کۆکردنەوەی دارایی، بەکاردێت بۆ پاراستنی هەندێ جۆر لە باڵندەکان کە هەڕەشەی لەناوچوونیان لێ دەکرێت.

وانەی 1

شیکارکردنی سیستەمە هێڵییەکان بەلەجیاتیدانان

Solving Linear Systems by Substitution



بۆچی زۆرجار پێویست بە شیکارکردنی سستەمێکی دوو هاوکێشەی هێڵی دەبێت و وەڵامی تەواوت دەداتێ بەبێ نزیکردنەوە. فرۆشیار لە بازاڕدا بە وردی پێویستی بە دیاریکردنی نرخی هەر کاڵایەك دەبێت لە پێناو گەیشتنی بەو قازانجەی کە دەیەوێت.

ئامانجەکان

- سیستمی دوو هاوکێشەی هێڵی بە ڕێگای لە جیاتیدانان شیکاردەکات.

زاراوەکان
Vocabulary

ڕێگای لەجیاتیدانان
Substitution Method

لە پۆلەکانی پێشوو فێری سستەمی هاوکێشە هێڵییەکان بوویت و هەڵسایت بە شیکارکردنی هەندێکیان. لەم پۆلەدا فێری چەند ڕێگایەکی شیکارکردن دەبیت بۆ ئەم جۆرە سیستمانە. لەسەرەتادا فێری ڕێگای لەجیاتیدانان دەبیت

چالاکی

Exploring Substitution — **دۆزینەوەی ڕێگای لەجیاتیدانان**

جێبەجێکردن
پێشبڕکێی ئۆتۆمبیلەکان

پێشبڕکێی ئۆتۆمبیلەکان کە لە شاری سبرنگ لە وڵاتە یەکگرتووەکانی ئەمەریکا بەڕێوەدەچێت یەکێك لە گرنگترین پێشبڕکێیەکانی ئۆتۆمبێلەکان پێکدێنێت. تیپی لیخوڕینی هەر ئۆتۆمبێلێك لەو پێشبڕکێیە لە دوو شوفێر پێکهاتووەو هەریەکەیان بەجیا چەند خولێك ئەنجام دەدەن. تیپی کارل و مایکل 157 خولیان ئەنجامداوە، ئەگەر مایکل 21 خولی لە کارل کەمتر ئەنجام دابێت، ئایا هەریەکەیان چەند خولی ئەنجامداوە؟

1. بەنووسینی هاوکێشەکان دەستپێبکە بۆ ئەوەی نموونەیەکی بیرکاری بدۆزیەوە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکە. نەزانراوێك هەڵبژێرە بۆ نواندنی خولەکانی کە کارل ئەنجامیداوە و نەزانراوێك هەڵبژێرە بۆ نواندنی خولەکانی کە مایکل ئەنجامیداوە، بەمەش سستەمێکی دووهاوکێشەی هێڵیت دەستدەکەوێت.

$$\begin{cases} x+y=157 \\ y=x-21 \end{cases}$$

بەدوو نەزانراوی x و y

2. ڕێگای خەمڵاندن و پاسادانکردن بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای x و y کە دەبنە شیکاری دووهاوکێشەکە.

شیکاری پرسیارەکان

3. سەیری هاوکێشەی دووەم $y=x-21$ بکە، ئەم زانیارییە دەربارەی y چۆن بەکاردەهێنیت لە هاوکێشەی یەکەمدا؟

4. $y=x-21$ لەجیاتی نەزانراوی y لە هاوکێشەی یەکەم بەهای $x-21$ دابنێ، لە پاشاندا ئەو هاوکێشەیەی دەست دەکەوێت شیکاریبکە بۆ دۆزینەوەی بەهای x.

5. بەهای نەزانراوی x کە لە پرسیاری پێشوو دەرچووە لە هاوکێشەی دووەم دابنێ بۆ هەژمارکردنی بەهای y.

خاڵی چاودێری √

6. بەهای x و y بەراورد بکە لەگەڵ ئەو دوو بەهایەی لە ڕێگەی خەمڵاندن و پاسەدانکردنەوە دەستکەوتووە. ئایا ئەم دوو ئەنجامە جووتن؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

ئەگەر بەهای یەکێك لەدوو نەزانراوی سستەمی دوو هاوکێشەی هێڵی بزانیت، ئەوا دەتوانیت سیستمەکە شیکاربکەیت ئەویش بە دانانی بەهای ئەم نەزانراوە لە یەکێك لە دوو هاوکێشەکەدا. ئەم ڕێگایە بۆ شیکارکردنی سستەمەکە پێی دەووترێت ڕێگای لە **جیاتیدانان Substitution method**

نموونە 1

سیستمی $\begin{cases}8x+2y=19\\x=3\end{cases}$ بە ڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکە

شیکار

لەبەرئەوەی $x=3$، دەتوانیت ئەو بەهایە لەجیاتی x لە هاوکێشەی یەکەم دابنێی:

ئەو هاوکێشەیەی دەستکەوتووە شیکاربیکە بۆ دۆزینەوەی بەهای نەزانراوی y

$$8(3)+2y=19$$
$$24+2y=19$$
$$2y=-5$$
$$y=-2.5$$

جووتە ڕێکخراوی $(3, -2.5)$ شیکاری سیستمەکەیە

پاسادانی ڕاستی شیکارەکەبکە بەلەجیاتیدانانی x و y لە هاوکێشەی یەکەمدا:

$$8(3)+2(-2.5)\overset{?}{=}19$$
$$24+(-5)\overset{?}{=}19$$
$$19=19$$

ڕاستە

هەوڵبدە سیستمی $\begin{cases}2y+3x=19\\y=5\end{cases}$ بە لەجیاتیدانان شیکاربکە

نموونە 2

سیستمی $\begin{cases}15x-5y=30\\y=2x+3\end{cases}$ بە لەجیاتیدانان شیکاربکە

شیکار

لەجیاتی y بەهای $2x+3$ لە هاوکێشەی یەکەمدا دابنێ پاشان هاوکێشە دەستکەوتووەکە شیکاربکە.

$$15x-5(2x+3)=30$$
$$15x-10x-15=30$$
$$5x-15=30$$
$$5x=45$$
$$x=9$$

لەجیاتی x بەهای 9 لە هاوکێشەی دووەم دابنێ پاشان هاوکێشە دەستکەوتووەکە شیکاربکە

$$y=2(9)+3$$
$$=18+3$$
$$=21$$

شیکارەکە بریتییە لە جووتە ڕێکخراوی $(9, 21)$

پاسادانی ڕاستی شیکارەکە بکە بە لەجیاتیدانانی بەهای x و y لەدوو هاوکێشە سەرەکییەکەدا.

$$15(9)-5(21)\overset{?}{=}30$$
$$135-105\overset{?}{=}30$$
$$30=30$$

ڕاستە

$$21\overset{?}{=}2(9)+3$$
$$21\overset{?}{=}18+3$$
$$21=21$$

ڕاستە

هەوڵبدە ئەم سیستمانە بە ڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکە

أ $\begin{cases}2x+5y=14\\y=5\end{cases}$

ب $\begin{cases}-3x+2y=31\\x=0.5y+6\end{cases}$

نموونە 3

سیستمی $\begin{cases}3x+y=4\\5x-7y=11\end{cases}$ بەڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکە

شیکار

بۆ ئەوەی ڕێگای لەجیاتیدانان بەکاربهێنێت، شیکاری هاوکێشەی یەکەم بکە بۆ هەژمارکردنی بەهای y بەپێی x

$$3x+y=4$$
$$3x+y-3x=4-3x$$
$$y=4-3x$$

ئاسانترین هاوکێشە هەڵبژێرە بۆ شیکارکردن

لەجیاتی y بەهاکەی $4-3x$ لە هاوکێشەی دووەم دابنێ پاشان شیکاری هاوکێشەکە بکە

$$5x-7y=11$$
$$5x-7(4-3x)=11$$
$$5x-28+21x=11$$
$$26x-28=11$$
$$26x=39$$
$$x=1.5$$

لەجیاتی x بەهای 1.5 لە هاوکێشەی یەکەم دابنێ پاشان شیکاری هاوکێشەکە بکە

$$3(1.5)+y=4$$
$$4.5+y=4$$
$$y=-0.5$$

شیکار بریتییە لە جووتە ڕێکخراوی $(1.5, -0.5)$. پاسادانی ڕاستی شیکارەکە بکە بە لەجیاتیدانانی بەهای x و بەهای y لە دوو هاوکێشە بنەڕەتییەکان.

بیری ڕەخنەگر بۆچی لە نموونە 3 دا هەڵسایت بە هەژمارکردنی نەزانراوی y بەپێی x لە هاوکێشەی یەکەمدا لەجیاتی هەژمارکردنی x بەپێی y ؟

هەوڵبدە سیستمی $\begin{cases}6x-2y=11\\x+3y=4\end{cases}$ بەڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکە

نموونە 4

جێبەجێکردن
بازرگانی

سالار لە یارییەکانی کۆتایی تۆپی پێدا کڵاو دەفرۆشێت. 100 کڵاوی وەرزی پێشووی لاماوە و 300 کڵاوی تازەی هەیە، سالار لەم وەرزە دەیەوێت هەموو کڵاوەکان بەبەهای 5300000 دینار بفرۆشێت. دەبێ چ نرخێك بۆ کڵاوی تازەو کۆن دابنێ تا بگات بەو ئامانجە، ئەگەر بزانیت نرخی کڵاوێکی تازە 7000 دیناری زیاترە لە نرخی کڵاوێکی کۆن؟

شیکار

بەهەڵبژاردنی دوو نەزانراوی یەکەم هێمای d نرخی کڵاوێکی کۆن بێت و هێمای n نرخی کڵاوێکی تازەبێت. سستەمی دوو هاوکێشەکە بنووسە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکە:

$$\begin{cases}300n+100d=5\ 300\ 000\\n=d+7000\end{cases}$$

لەجیاتی n لە هاوکێشەی یەکەمدا بەهای $d+7000$ دابنێ پاشان هاوکێشەکە شیکاربکە

$$300(d+7000)+100d=5\ 300\ 000$$
$$300d+2\ 100\ 000+100d=5\ 300\ 000$$
$$400d+2\ 100\ 000=5\ 300\ 000$$
$$400d=3\ 200\ 000$$
$$d=8000$$

لەجیاتی d بەهای 8000 لە هاوکێشەی دووەمدا دابنێ پاشان هاوکێشەکە شیکاربکە.

$$n=8000+7000$$
$$n=15\ 000$$

شیکارەکە بریتییە لە $(15000, 8000)$ واتا سالار پێویستە کڵاوە تازەکان بە نرخی 15000 دینارو کڵاوە کۆنەکان بە نرخی 8000 دینار بفرۆشێت.

هەوڵبدە پێویستە نرخی چەند دابنێ بۆ هەریەکە لە کڵاوەکان، ئەگەر بیەوێت 6200000 دیناری دەستکەوێت

ڕاهێــــــنـــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئەگەر بزانیت $y = 42$، ئەوا چۆن لەجیاتیدانان بەکاردێنیت بۆشیکارکردنی هاوکێشەی $y = x + 8$.

2 ئەم دوو هاوکێشەت $-4x + y = 2$ و $2x + 3y = 34$ هەیە، ئاسانترین نەزانراو و ئاسانترین هاوکێشە بۆدەستپێکردنی شیکار هەڵبژێرە، هۆی هەڵبژاردنەکەت دیاربکە.پاشان شیکاری بکە

3 ڕوونیبکەوە چۆن لەجیاتیدانان بەکاردەهێنی بۆ شیکاری سستەمی $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases}$.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم سیستمانە بە لەجیاتیدانان شیکاربکە، پاشان پاسادانی شیکارەکە بکە

4 $\begin{cases} 5x = 3y + 12 \\ x = 5 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 10x = 4y + 2 \end{cases}$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

8 سەرجەمی دوو ژمارە دەکاتە 27، گەورەکەیان 3ی لەوەی تریان زیاترە ئەم دووژمارە کامانەن؟

ئەم سیستمانە شیکاربکە

9 $\begin{cases} 2x + 8y = 1 \\ x = 2y \end{cases}$

10 $\begin{cases} x = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

12 $\begin{cases} y = 5 - x \\ 1 = 4x + 3y \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x + y = -92 \\ 2x + 2y = -98 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ x + y = 4 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 6y = x + 18 \\ 2y - x = 6 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 5x + y = 2 \\ 10x = 4y + 2 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2y + x = 4 \\ y - x = -7 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 4y - x = 15 \\ y + x = 6 \end{cases}$

19 $\begin{cases} y = x - 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ -3x - 6y = -24 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 5x - 7y = 31 \\ -4x + 2y = -14 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 3x + y = 21 \\ 10x + 5y = 65 \end{cases}$

23 $\begin{cases} -3y = 9x + 24 \\ 6y + 2x = 32 \end{cases}$

24 $\begin{cases} 12x + 4y = 22 \\ 3x - 8y = -10 \end{cases}$

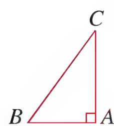
25 $\begin{cases} 11x + 4y = -17 \\ -6x + y = 22 \end{cases}$

26 $\begin{cases} -5x + 7y = -41 \\ 7x + y = 25 \end{cases}$

بەستنەوە

27 **ئەندازە** درێژی و پانی لاکێشەیەك بدۆزەوە، ئەگەر بزانیت چێوەکەی 210m ، و درێژییەکەی یەکسانە بە دوو ئەوەندەی پانییەکەی.

28 **ئەندازە** سەرجەمی پێوانەکانی دوو گۆشەی B و C لەسێ گۆشەی بەرامبەردا دەکاتە 90°. پێوانەی هەرگۆشەیەك لە گۆشەکانی سێگۆشەکە هەژماربکە ئەگەر بزانیت پێوانەی گۆشەی B ، 30° لە دوو ئەوەندەی پێوانەی گۆشەی C کەمترە.



بەستنەوە

29 **بیردۆزی ژمارەکان** ژمارە x چواری کەمترە لە سێ ئەوەندەی ژمارە y. ئەگەر دوو ئەوەندەی y کەمبکەیەوە لەسەرجەمی 3 لەگەڵ دوو ئەوەندەی x دەکاتە 11. ئەم دوو ژمارەیە کامانەن؟

سیستمی دوو هاوکێشەی هێڵی بۆ هەر پرسیارێك بنووسە پاشان شیکاری بکە

30 **کاری خێرخوازی** یەکێك لە کۆمەڵەکانی خێرخوازی ئاهەنگێکی سازکرد، کە تیایدا سارەدەمەنی پێش کەشکرا بەسەر ژمارەیەك لە پیگەیشتووان و منداڵان کە ژمارەیان 210 کەس بوون، بەوە 935 هەزار دینار کۆکرایەوە، ئەگەر نرخی خواردنەوە بۆ پێگەیشتووان 6 هەزار دینار بێت و بۆ منداڵان 3.5 هەزار دینار بێت.

أ هاوکێشەیەك بنووسە دەریبخات چۆن بڕی پارەکە بەتەواوی کۆکراوەتەوە

ب هاوکێشەیەك بنووسە کە ژمارەی تەواوی کەسەکان دیارییکات.

ج سیستمی دوو هاوکێشەکەی بەدەستکەوتووەکە شیکاربکە. ژمارەی پێگەیشتووان چەند بوو؟ و ژمارەی منداڵەکان چەند بوو؟

31 **دەروازەیەك لەسەر رۆشنبیری چینی** ژمارەیەك لە جووتیارانی چینی بەشداریان کرد لە دابینکردنی نرخی ئامێرێکی کشتوکاڵی، ئەگەر هەر یەکێکیان 8 پارچە پارە بدات، بڕی پارەکە 3 پارچە زیاتر دەبێت لە بڕی داواکراو، و ئەگەر هەر یەکێکیان 7 پارچە پارە بدات، بڕی پارەکە 4 پارچە کەمتر دەبێت لە بڕی داواکراو. ئایا ژمارەی جووتیارەکان چەندە؟ و نرخی ئامێرەکەش چەندە؟



ڕوانینێك بۆ دواوه

32 بۆ خۆشی لە پێشبڕكێی ڕاكردندا نەسرین 20m لە پێش ڕووناكە و ڕووناكیش 5m لە دوای ژیانە و ژیان 10m لەدوای بەهارە، بەڵام شیرین بە 15m لەپێش بەهارە، ڕیزبەندی ڕاكردووەكان چۆن بوو؟

ئەم هاوكێشانە شیكاربكە

33 $\frac{x}{15} = 3$

34 $\frac{3}{x} = 15$

35 $\frac{15}{x} = 3$

36 $\frac{x}{3} = 15$

37 42% ژمارەیەك دەكاتە 12.6 ، ژمارەكە كامەیە؟



ڕوانینێك بۆ پێشەوە

لەجیاتیدانان بەكاربهێنە بۆ شیكاركردنی هەریەك لەم سیستمانە

(تێبینی بكە 3 هاوكێشەو 3 نەزانراو هەیە)

38
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ y + 3z = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

39
$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 44 \\ 2y - 6z = 4 \\ z = 4 \end{cases}$$

شیکارکردنی سیستمە هێڵییەکان بەلابردن

Solving Linear Systems by Elimination

وانەی

2



ئامانجەکان

- سستەمی دوو هاوکێشەیی هێڵی بە ڕێگای لابردن شیکار دەکات.

بۆچی

لابردن ڕێگایەکی نوێیە کە شیکارێکی خێرا دەدا بەدەستەوە بۆ سستەمی دوو هاوکێشەی هێڵی ئاڵۆز کە لەم وانەیەدا دێتە پێشت

جێبەجێکردن

بەکرێدانی ئۆتۆمبێل

زاراوەکان

Vocabulary

ڕێگای لابردن

Elimination Method

نووسینگەی هەوار هەڵدەستێت بە بەکرێدانی ئۆتۆمبێل. گەشتیارێك بڕیك پارە دەدات بەرامبەر هەر ڕۆژێك بۆ بەکرێگرتنی ئۆتۆمبێل و بڕێکی تر پارە دەدات بۆ هەر کیلۆمەترێك ئۆتۆمبێلەکە دەیبڕێت. دوو هاوڕێ ڕزگار و زانا هەریەکەیان ئۆتۆمبێل بەکرێ دەگرن لە نووسینگەی هەوار بۆ گەشتێك، گەشتی ڕزگار 2 ڕۆژی خایاند و 125km بڕی و گەشتەکەی زانا 4 ڕۆژی خایاندو 350km بڕی، ڕزگار 250 287 دیناریدا، و زانا 500 697 دیناریدا، کرێی ئۆتۆمبێلەکە لە ڕۆژێکدا و تێچوونی یەك کیلۆمەتر دیاریبکە.

دەتوانی سیستمێکی دوو هاوکێشەی هێڵی بنووسیت، پاشان شیکاریان بکەیت بۆ دیاریکردنی هەردوو کرێیەکە. بە پێناسەکردنی هەردوو نەزانراوی پرسیارەکە دەستپێبکە.

نەزانراوی d : هێمای کرێی ئۆتۆمبێلەکە بێت لە ڕۆژێکدا

نەزانراوی k : هێمای پارەی تێچوونی یەك کیلۆمەتر بێت.

لە زانیارییەکانی سەرەوەدا دەتوانیت سیستمی هەردوو هاوکێشە بنووسیت.

$$\begin{cases} 2d + 125k = 287\ 250 \\ 4d + 350k = 679\ 500 \end{cases}$$

بێگومان دەتوانیت ئەم سیستمە بە ڕێگای لەجیاتیدانان شیکار بکەی، بەڵام ئەمە کارێکی ئاسان نییە. لەم وانەیەدا فێری ڕێگایەکی تازە دەبیت بۆ شیکارکردنی سیستمە ئاڵۆزەکان.

چالاکی

بەکارهێنانی دژەکان Using Inverses

سیستمی ئەم دوو هاوکێشەیە $\begin{cases}3x+2y=7\\5x-2y=9\end{cases}$ شیکار دەکەیت

1. ئەم دوو هاوکێشەیە دوو ڕادەی دژ بە یەکتری تێدایە، کامانەن؟
2. سیفەتی کۆکردنەوە لەیەکسانبووندا بەکاربهێنە بۆ ئەوەی هاوکێشەیەکت دەستبکەوێت لەهەردوو هاوکێشەکە $3x+2y$ لەگەڵ $5x-2y$ لەگەڵ 7 و 9 کۆبکەوە، هاوکێشە تازەکە چەند نەزانراوی تێدایە؟
3. هاوکێشە تازەکە شیکاربکە بۆ دیاریکردنی بەهای نەزانراوەکەی، پاشان بەهای نەزانراوەکە لە یەکێك لە دوو هاوکێشە سەرەکییەکاندا دابنێ، هاوکێشە دەرچووەکە شیکاربکە بۆ دیاریکردنی بەهای نەزانراوی دووەم.
4. پاسادانی ئەوە بکە کە هەردوو بەهای دەستکەوتوو بۆ نەزانراوی x و y دەبنە شیکاری سیستمی دوو هاوکێشەکە.
5. ڕوونیبکەوە چۆن دژەکان بەکاردەهێنیت بۆ شیکارکردنی سیستمی هاوکێشەکان.

خاڵی چاودێری √

ڕێگای لابردن Elimination Method

لە چالاکییەکەی پێشوودا **ڕێگای لابردنت Elimination Method** بەکارهێنا بۆ شیکارکردنی سیستمی دوو هاوکێشە، ئەم ڕێگایە دژەکان بەکاردەهێنێت بۆ لابردنی یەکێك لە دوو نەزانراوەکە

نموونە 1 ڕێگای لابردن بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی ئەم سستەمە $\begin{cases}\mathbf{3x+4y=7}\\\mathbf{2x-4y=13}\end{cases}$

شیکار

سیفەتی کۆکردنەوە لە یەکسانیدا بەکاربهێنە بۆ دەستکەوتنی هاوکێشەیەك تەنها x ی تێدابێ کە لە هەردوو هاوکێشەکەوە دەردەچێت و هاوکێشەکە شیکاربکە.

$$\begin{aligned}3x+4y&=7\\2x-4y&=13\\\hline 5x+0&=20\\5x&=20\\x&=4\end{aligned}$$

تێبینیبکە $4y$ و $-4y$ دژی یەکترن

بۆ دیاریکردنی بەهای y بەهای x دابنێ بە 4 لە هاوکێشەی یەکەمدا

$$\begin{aligned}3x+4y&=7\\3(4)+4y&=7\\12+4y&=7\\4y&=-5\\y&=-1.25\end{aligned}$$

شیکاری سیستەمەکە دەبێتە $(4, -1.25)$

بەهای x بە 4 و بەهای y بە -1.25 لەهەردوو هاوکێشە سەرەکییەدا دابنێ بۆ پاسادانکردنی شیکارەکە:

$$\begin{aligned}3(4)+4(-1.25)&\overset{?}{=}7\\12+(-5)&\overset{?}{=}7\\7&=7\end{aligned}$$ ڕاستە

$$\begin{aligned}2(4)-4(-1.25)&=13\\8-(-5)&=13\\13&=13\end{aligned}$$ ڕاستە

تێبینی ئەوە بکە هاوکۆلکەکانی y لە هەردوو هاوکێشەکەدا دژی یەکترن، ئەمەش وادەکات کە شیکارکردنی ئەم جۆرە سیستمانە ئاسان بێت.

هەوڵبدە سیستمەکە بە ڕێگای لابردن شیکاربکە.

أ $\begin{cases}3y-x=5\\4y+x=9\end{cases}$

ب $\begin{cases}3y+2x=21\\5y-2x=14\end{cases}$

هەندێك حار وا پێویست دەكات هەردوولای یەكێك لە هاوكێشەكان یان هەردووكیان لە ژمارەیەك بدرێت بۆ بەدەستهێنانی دوو دژەكە كە ڕێگابدات بە لابردنی یەكێك لە دوو نەزانراوەكە، ئەگەر هاوكۆلكەی یەكێك لە دوو نەزانراوەكە 1 بێت كارەكە ئاسانە، بەڵام دەكرێت ئەم تەكنیكە جێبەجێبكرێت لەسەر ئەو سستەمانەی زیاتر ئاڵۆزن وەك سیستمی نموونە 2.

نموونە 2 ڕێگای لابردن بەكاربهێنە بۆ شیكاری سیستمی $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5x+7y=3 \end{cases}$

شیكار

هەردوولای هاوكێشەی یەكەم لە ژمارە 5 بدە و هەروەها هەردوولای هاوكێشەی دووەم لە 2–بدە بۆ ئەوەی دوو دژت دەستكەوێت.

$\begin{cases} (5)2x+(5)3y=(5)1 \\ (-2)5x+(-2)7y=(-2)3 \end{cases}$ یان $\begin{cases} 10x+15y=5 \\ -10x-14y=-6 \end{cases}$

سیفەتی كۆكردنەوە لە یەكسانبووندا بەكاربهێنە بۆ ئەوەی هاوكێشەیەكی تازەت دەستكەوێت تەنها یەك نەزانراوی تێدابێت ئەویش y ـە. هاوكێشەكە شیكاربكە. ئێستا بەهاكەی y لە هاوكێشەی یەكەم دابنێ. شیكارەكە دەبێتە$(2, -1)$.

$$\begin{aligned} 10x+15y&=5 \\ -10x-14y&=-6 \\ \hline y&=-1 \\ 2x+3y&=1 \\ 2x+3(-1)&=1 \\ 2x-3&=1 \\ 2x&=4 \\ x&=2 \end{aligned}$$

پاسادانی شیكارەكە بكە بە لەجیاتیدانانی بەهای هەردوو نەزانراوەكان لەهەردوو هاوكێشەكەدا.

$2(2)+3(-1)\overset{?}{=}1$ | $5(2)+7(-1)\overset{?}{=}3$

$4+(-3)\overset{?}{=}1$ | $10+(-7)\overset{?}{=}3$

$1=1$ ڕاستە | $3=3$ ڕاستە

هەوڵبدە ڕێگای لابردن بەكاربهێنە بۆ شیكاركردنی ئەم سیستمە $\begin{cases} 5x-3y=2 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$

نموونە 3 ڕێگای لابردن بەكاربهێنە بۆ شیكاركردنی ئەو پرسیارەی لەسەرەتای وانەكە باسكرا

$$\begin{cases} 2d+125k=287\ 250 \\ 4d+350k=679\ 500 \end{cases}$$

شیكار

هەردوولای هاوكێشەی یەكەم لە2– بدە

$$\begin{cases} (-2)2d+(-2)125k=(-2)287\ 250 \\ 4d+350k=679\ 500 \end{cases}$$

سیفەتی كۆكردنەوە لە یەكسانیدا بەكاربهێنە بۆ دەستكەوتنی هاوكێشەیەكی نوێ كە یەك نەزانراوی تێدایە ئەویش k، پاشان هاوكێشەكە شیكاربكە:

$$\begin{aligned} -4d+(-250k)&=-574\ 500 \\ 4d+\ 350k&=\ 679\ 500 \\ \hline 100k&=105\ 000 \\ k&=1050 \end{aligned}$$

لەجیاتی k بەهاكەی دابنێ لە هاوكێشەی یەكەمدا بۆ دیاریكردنی بەهای d

$$\begin{aligned} 2d+125(1050)&=287\ 250 \\ 2d+131\ 250&=287\ 250 \\ 2d&=156\ 000 \\ d&=78\ 000 \end{aligned}$$

شیكاری سیستمی هاوكێشەكانی پێشوو $(78\ 000; 1050)$. دەتوانیت پاسادانی ڕاستییەكەی بكەیت، كرێی ئۆتۆمبێل لە ڕۆژێكدا 78 هەزار دینار و بری پارەی تێچووی یەك كیلۆمەتر 1050 دینارە.

هەوڵبدە هەریەكە لەم سستمانە بە ڕێگای لابردن شیكاربكە.

أ $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$ ب $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ 5x+7y=41 \end{cases}$

ڕاهێـــــــنــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

هەردوو دژە ڕادەکە لەهەریەك لەم سیستمانە نیشانبدەو ڕوونیبکەرەوە چۆن شیکاری دەکەیت

1 $\begin{cases} x+7y=13 \\ x-7y=5 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 5x+3y=20 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 2a+b=6 \\ -2a-3b=8 \end{cases}$

جێبەجێکردنەکان

ئەو هەنگاوانەی پێویستن بۆ شیکارکردنی هەریەك لەم سیستمانە بەڕێگای لابردن باسبکە.

4 $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 3x+6y=7 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x-4y=-2 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 9a+2b=2 \\ 21a+6b=4 \end{cases}$

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

شیکاری سیستمەکە بەلابردن بکە، پاشان پاسادانی شیکارەکە بکە

7 $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 4x+3y=13 \\ 2x-4y=1 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 2x-2y=4 \\ 3x+5y=-10 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x-4y=0 \end{cases}$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

شیکاری سستمەکە بەلابردن بکە و پاسادانی ڕاستی شیکارەکە بکە

11 $\begin{cases} -x+2y=12 \\ x+6y=20 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 2a+3b=18 \\ 5a-b=11 \end{cases}$

13 $\begin{cases} -4x+3y=-1 \\ 8x+6y=10 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 5x-3y=11 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 2x=2-9y \\ 21y=4-6x \end{cases}$

16 $\begin{cases} -x-7=3y \\ 6y=2x-14 \end{cases}$

17 $\begin{cases} \frac{2}{3}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}y \\ y=3x-12 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 0.6x=3.2y+4.6 \\ 2.9y=0.3x+4.8 \end{cases}$

19 $\begin{cases} b=1.5k+4 \\ 0.8b+0.4k=0 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 2x=3y-12 \\ \frac{1}{3}x=4y+5 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 2x-7y=20 \\ 5x+8y=-1 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 2x-5y=-14 \\ -7x+4y=-5 \end{cases}$

23 $\begin{cases} 3x-2y=-26 \\ 5x+3y=9 \end{cases}$

24 $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y=-\frac{17}{15} \\ \frac{8}{5}x-\frac{7}{6}y=-\frac{3}{10} \end{cases}$

بەستنەوە

25 **ئەندازە** لاکێشەیەك چێوەکەی 24m، درێژییەکەی یەکسانە بە 3 ئەوەندەی پانییەکەی، درێژی و پانی لاکێشەکە چەندە؟

سستەمی دووهاوکێشە بۆ هەر پرسیارێك بنووسە، باشترین ڕێگا هەڵبژێرە بۆ شیکاری سستەمەکەو لە ڕاستی وەڵامەکە دڵنیابە.

جێبەجێکردنەکان

26 **بیرکاری بەکاربەر** مامۆستای بیرکاری بڕیاریدا ئاهەنگێك بۆ خوێندکارەکانی خۆی سازبدات بەبۆنەی یادی لەدایکبوونی زانای بیرکاری خوارزمی، 3 کارتۆن کێك و 3 شووشە شەربەتی بۆ خوێندکارانی هۆبەی «أ» کڕی بە 54 هەزار دینار و 4 کارتۆن کێك و 6 شووشە شەربەتی بۆ خوێندکارانی هۆبەی «ب» کڕی بە 78 هەزار دینار، نرخی هەریەکە لە کارتۆنێك کێك و شووشەیەکی شەربەت چەندە؟

27 **داهات** بارام پاسەوانە لە یەکێك لە گۆڕەپانەکانی وەستانی ئۆتۆمبێل، داهاتێکی نەگۆڕی هەیە بەرامبەر 15 کاتژمێر کارکردن لە هەفتەیەکداو بۆ هەر کاتژمێرێك زیاد کاربکات کرێیەکی زیادەی هەیە، بارام 25 کاتژمێر لە هەفتەی یەکەمدا کاریکرد بەمە 710 هەزار دیناری وەرگرت و 22.5 کاتژمێر لە هەفتەی دووەم کاریکرد بەمەش 641.25 هەزار دیناری وەرگرت، کرێیە نەگۆڕەکەی و کرێی کاتژمێرێکی زیاد چەندە؟

28 **بازرگانی** یەکێك لە تۆمارگەکان دووجۆر کاسێتی مۆسیقا دەفرۆشێت یەکێکیان کاسێتی هەڵپەڕکی و ئەوی تریان کاسێتی مۆسیقای کلاسیکییە، نرخی کاسێتی هەڵپەڕکی 2 هەزار دینارە و نرخی کاسێتی مۆسیقای کلاسیکی 3 هەزار دینارە، تۆمارگەکە لە ڕۆژێکدا 25 کاسێتی لەهەردووجۆر فرۆشت و بەمەش دەستکەوتەکەی 69 هەزاردیناربوو، تۆمارگەکە چەند کاسێتی هەڵپەڕکێ و چەند کاسێتی مۆسیقای کلاسیکی فرۆشتووە؟

29 **بەکرێدانی خانوو** کرێچییەك لەگەڵ کرێی مانگی یەکەمدا بارمتەیەك دادەنێ، جوامێر لە مانگی یەکەمدا 2700000 دیناریدا و بە درێژایی ساڵەکە 20850000 دیناریدا، ئەوا بەهای هەریەکە لە بارمتەکەو کرێی خانووەکەی لە مانگێکدا چەندە؟

30 **گەشتوگوزار** لە پشووی کۆتایی هەفتە ئۆتێلێك دووجۆر پیشاندانی خستەڕوو، یەکەمیان 2 شەو و 4 ژەمە خواردن دەگرێتەوە بە بەهای 615 هەزار دینار و دووەمیان 3 شەو و 6 ژەمە خواردن دەگرێتەوە بە بەهای 1027.5 هەزاردینار، تێچووی شەوێك چەندە؟ و تێچووی ژەمە خواردنێك چەندە؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

31 **دەروازەیەك لەسەر ڕۆشەنبیری فیرعەونییەکان** زاناکانی شوێنەوارناسی لەسەر کاغەزی فیرعەونییەکان ئەم پرسیارەیان بینی، نرخی تورەگەیەك کە هەمان کێش لە زێڕوزیو و مسی تێدایە دەکاتە 84 شەعتە (یەکەی پارە فرعەونییەکان) کێشی هەریەکە لە زێڕو زیو و مسی ناو تورەگەکە چەندن ئەگەر نرخی یەك دبن (یەکەی پێوانی کێش لەلای فیرعەونییەکان) لە زێڕ 12 شەعتە و یەك دبن لەزیو 6 شەعتەو یەك دبن لە مس 5 شەعتە بێت؟

هاوکێشەکە شیکاربکە

32 $-5=-x+7$

33 $3x-2=2x+1$

34 $\frac{1}{2}x+3=2$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

35 **تەکنۆلۆژیا** وێنەی دوو ڕاستەهێڵی $2x-3y=6$ و $4x-6y=18$ بکێشە لەهەمان ڕووتەختی پۆتانەکاندا، ئەوەی دەستکەوتووە باسبکە،
(بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە ئەگەر بکرێت).

شیكركردنی سیستمی هاوكێشە هێڵییەكان بە ڕوونكردنەوەیی

Solving Linear Systems Graphically

وانەی 3



بۆچی

بەزۆری سیستەمی هاوكێشە هێڵییەكان بۆ شیكاركردنی پرسیارەكانی ژیانی ڕۆژانە بەكاردێت بەتایبەتی لە كارگێڕی و ئابووری، لە هەندێ باردا دۆزینەوەی شیكاری تەواو زۆر گرنگ نییە، بەڵام پێویستە شیكارێكی نزیك بدۆزینەوەو لە هەندێ باردا داواكراو ئەوەیە ئەگەر شیكاری هەبێت تەنها یەك شیكار یان زۆرتر لە شیكارێك، لەم بارانەدا شیكاری ڕوونكردنەوەی بۆ سستەمی هاوكێشە هێڵییەكان یارمەتیمان دەدات بۆ وەڵامدانەوەی ئەو پرسیارە.

ئامانجەكان

- سیستمی دووهاوكێشەی هێڵی بە ڕوونكردنەوەیی شیكاردەكات.
- سستەمی دووهاوكێشەی هێڵی پۆلێندەكات.

شیكاركردنی سیستمی هاوكێشە هێڵییەكان بە ڕوونكردنەوەیی
Solving Linear Systems Graphically

لەبەشی پێشوو چۆنیەتی شیكاركردنی سیستمی هاوكێشە هێڵییەكان فێربوویت بەبەكارهێنانی لەجیاتیدانان یان لابردن، لەهەریەكە لەم دوو ڕێگەیە پێویستە بەهای یەكێك لە دوو نەزانراوەكە دیاریبكەین پاشان بەهای ئەویتریان دیاریبكەین. لەلایەكی تر، شیكاركردنی پرسیارێكی ژیانی ڕۆژانە لەوانەیە تەنها پێویستی بە دۆزینەوەی بەهای نزیكەیی شیكارەكەیە، و لەوانەیە وا پێویست بكات بە وەڵامدانەوەی پرسیارێكی سادە وەك ئایا سستەمی هاوكێشەكان شیكاری هەیە؟ و ژمارەیان چەندە ئەگەر هەبن؟ لەم وانەیە ڕێگای شیكاركردنی ئەو سستەمانە فێردەبیت و وەڵامی خێرا بۆ ئەم پرسیارانە مسۆگەر دەكەیت.

زاراوەكان
Vocabulary

سیستمی دیار
Independent System
سیستمی نادیار
Dependent System
سیستمی ئەستەم
Inconsistent System

چالاكی

شیكاركردنی سستەمی هاوكێشە هێڵییەكان بە ڕوونكردنەوەیی
Solving Linear Systems Graphically

پێویستمان بە بژمێری ڕوونكردنەوەیی یان كاغەزی ڕوونكردنەوەیی هەیە.

شیكاری ڕوونكردنەوەیی سیستمی $\begin{cases} y = 3x+1 \\ y = -x+5 \end{cases}$ دەكەین

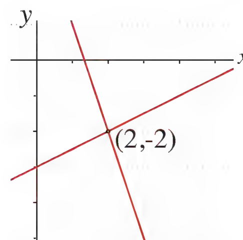
1. چی دەڵێیت دەربارەی خاڵی (c, d) بەپێی دوو ڕاستەهێڵی $y = 3x+1$ و $y = -x+5$ كاتێك جووتە ڕێكخراوی (c, d) شیكارێكی ئەو سستەمە بێت؟
2. هەردوو ڕاستەهێڵەكە لەهەمان ڕووتەختی پۆوتان بكێشە.
3. بەهای نزیكەیی بۆ پۆوتانی خاڵی یەكتربڕینی دووڕاستەهێڵەكە بدۆزەوە.
4. شیكارێكی نزیكەیی سیستمەكە بدۆزەوە.

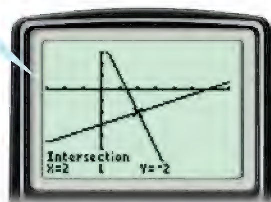
خاڵی چاودێری √

نموونە 1 بەڕوونکردنەوەیی سستەمی $\begin{cases}3x+y=4\\x-2y=6\end{cases}$ شیکاربکە.

شیکار

بۆ ئەوەی ڕاستەهێڵی $3x+y=4$ بکێشن، خاڵی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری دووەم y دیاریبکە لە ڕێگای دانانی 0 لەجیاتی گۆڕاوی x،دۆزینەوەی بەهای گۆڕاوی y کەبەهای بەرامبەرەکەیەتی.
$y=4$ دەستدەکەوێت، کەواتە ڕاستەهێڵەکە بەخاڵی $(0,4)$ دا دەڕوات، دیسان خاڵی یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکە لەگەڵ تەوەری یەکەم دیاربکە بە دانانی بەهای 0 لەجیاتی گۆڕاوی y و دۆزینەوەی بەهای x ی بەرامبەری $x=\frac{4}{3}$ دەستدەکەوێت، کەواتە ڕاستەهێڵەکە بە خاڵی $\left(\frac{4}{3},0\right)$ دادەڕوات.
ئێستا ڕاستەهێڵەکە بکێشە. بۆ کێشانی ڕاستەهێڵی $x-2y=6$ هەمان ڕێگا بەکاربهێنە.
دوو ڕاستەهێڵەکە لە $(2,-2)$ یەکتردەبڕن.





شاشەکە وەك ئەمەی خوارەوە پێناسەکراوە: 7 ;3- ئاسۆیی و 3 ;7- ستوونی بۆ ئەوەی وێنەی بەرامبەرت دەستکەوێ

دڵنیابە لە شیکارکە بە لەجیاتیدانانی ژمارە x لە بری 2 و ژمارە 2- لەبری y

$$3x+y\overset{?}{=}4 \qquad x-2y\overset{?}{=}6$$

$$3\times2+(-2)\overset{?}{=}4 \qquad 2-2(-2)\overset{?}{=}6$$

$$6-2\overset{?}{=}4 \text{ ڕاستە} \qquad 2+4\overset{?}{=}6 \text{ ڕاستە}$$

چالاکی 2

پۆلێنکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵییەکان Classifying Linear Systems

بژمێری ڕوونکردنەوەیی یان پەڕەی ڕوونکردنەوەییمان پێویستە

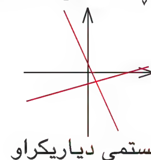
$\begin{cases}y=2x+1\\y=-x+5\end{cases}$
$\begin{cases}y=2x-1\\y=2x+1\end{cases}$
$\begin{cases}y=\frac{8-3x}{4}\\y=-\frac{3}{4}x+2\end{cases}$

1. بەڕوونکردنەوەیی سیستەمی یەکەم بنوێنە لە خشتەی بەرامبەر
أ. ئایا دوو ڕاستەهێڵەکە یەکتربڕن؟
ب. ئایا سیستەمەکە تەنها یەك شیکاری هەیە؟ ئەو شیکارە چییە ئەگەر هەبوو؟ و ئەگەر سیستەمەکە شیکاری نییە، سیستەمەکە بگۆڕە بۆ ئەوەی تەنها یەك شیکارت دەستکەوێ و هەژماربیکە.
2. ئەوەی ئەنجامتدا دووبارەبکەوە لەسەر سیستەمی دووەم پاشان سێیەم.
3. پەیوەندی نێوان دوو ڕاستەهێڵەکە ڕوونبکەوە.
- کاتێك سیستەمەکە شیکاری نەبێت.
- کاتێك سیستەمەکە ژمارەیەکی ناکۆتا شیکاری هەبێت.
- کاتێك سیستەمەکە تەنها یەك شیکاری هەبێت.

بیری ڕەخنەگر

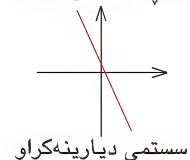
کاتێك هەوڵ دەدەیت بە ڕوونکردنەوەیی سیستەمێکی دووهاوکێشەی هێڵی شیکار بکەیت، یەکێك لەم سێ بارانەی خوارەوەت بۆ دەردەچێ؟

دوو ڕاستەهێڵی یەکتربڕ



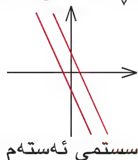
سستەمی دیاریکراو

دووڕاستەهێڵی جووت



سستەمی دیارینەکراو

دووڕاستەهێڵی تەریب



سستەمی ئەستەم

پۆلێنی سستەمی هاوکێشە هێڵییەکان Classifying Linear Systems

سستەمی هاوکێشە هێڵییەکان پۆلێن دەکرێن بۆ سێ جۆری بنەڕەت:

- سیستمی ستەم **Inconsistent**: سستەمێکە شیکاری نییە
- سیستمی دیار **Independent**: سستەمێکە تەنها یەك شیکاری هەیە
- سیستمی نادیار **Dependent**: سستەمێکە ژمارەیەکی بێسنوور شیکاری هەیە

نموونە 2 هەریەکە لەم سیستمانە پۆلێن بکەو شیکارەکەی دیاریبکە ئەگەر هەبێت

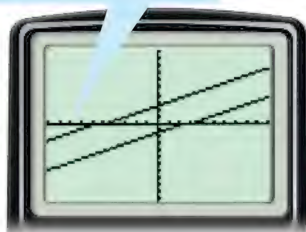
أ $\begin{cases} x+y=5 \\ x-5y=-7 \end{cases}$ ب $\begin{cases} x-2y=3 \\ x+5=2y \end{cases}$

شیکار



دوو ڕاستەهێڵەکە یەکتر دەبڕن چونکە لارییەکانیان جیاوازە

لەبەرئەوەی دوو ڕاستەهێڵەکە یەکتر دەبڕن ئەوا سیستمەکە دیاریکراوە. شیکارەکەش بریتییەلە (3, 2)



دوو ڕاستەهێڵەکە یەکتر نابڕن چونکە لارییەکانیان یەکسانن و جووتیش نابن

لەبەرئەوەی دوو ڕاستەهێڵەکە تەریبن ئەوا سیستمەکە ئەستەمە

هەوڵبدە سیستمی $\begin{cases} y=3x+4 \\ y=-2x+4 \end{cases}$ پۆلێن بکەو شیکارەکەی دیاربکە ئەگەر هەبێت

نموونە 3

جێبەجێکردن

زانستە کۆمەڵایەتییەکان

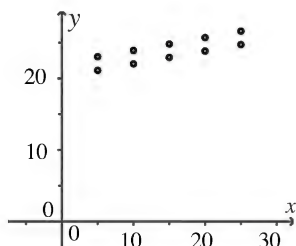
ئامارەکان دەربارەی تەمەنی هاوسەرگیری بۆ کوڕ و کچ لە یەکێك لە وڵاتەکان دەرکەوتووە، وەك پێدراوەکان لە وێنەی بەرامبەردا دیاریکراوە. خشتەیەك پێکبهێنە ئەو پێدراوانە پوختکاتەوە. ئەگەر کارەکە لەسەر ئەم شێوەیەبەردەوامبێت، ئایا کاتێك دێت تەمەنی هاوسەرگیری لای کوڕەکان و کچەکان یەکسان بن؟



شیکار

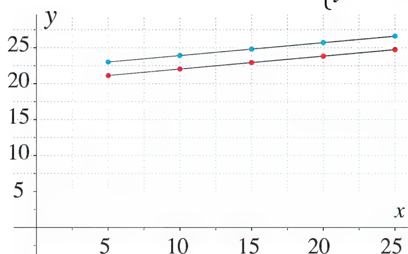
بۆ وەڵامدانەوەی ئەم پرسیارە پێدراوەکانی تایبەت بەهەردوو ڕەگەز لەهەمان تەوەری پۆوتان بنوێنە

پاش ساڵی 1970	تەمەنی هاوسەرگیری پیاوان	تەمەنی هاوسەرگیری ژنان
5	23.02	21.14
10	23.92	22.04
15	24.82	22.94
20	25.72	23.84
25	26.62	24.74



بڕوانە کە خاڵەکانی بۆ هەردوو ڕەگەزەکە دەگەڕێنەوە، دەکەونە سەر هەمان ڕاستەهێڵ. لاری ڕاستەهێڵی پەیوەست بە کوڕەکان دەکاتە $m_1 = \frac{24.82-23.02}{15-5} = 0.18$ ، هەروەها لاری ڕاستەهێڵی پەیوەست بە کچەکان دەکاتە $m_2 = \frac{22.94-21.14}{15-5} = 0.18$ بۆ ئەوەی هاوکێشەی ڕاستەهێڵی پەیوەست بە کوڕەکان بنووسین هاوکێشەی $y = 0.18x + b$ بنووسە بەبەکارهێنانی خاڵی $(10, 23.92)$ بەهای b دیاریبکە: واتا $23.92 = 0.18(10) + b$ لەوەوە $b = 23.92 - 1.8 = 22.12$ کەواتە هاوکێشەی پەیوەست بە کوڕەکان دەبێتە $y = 0.18x + 22.12$. بەهەمان ڕێگا دەتوانیت هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی پەیوەستە بە کچەکان بدۆزیتەوە کە بریتی دەبێ لە $y = 0.18x + 20.24$ تەمەنی هاوسەرگیری لای کوڕەکان لەگەڵ تەمەنی هاوسەرگیری لای کچەکان یەکسان دەبێت ئەگەر سستەمی هاوکێشەکانی دێت شیکاری هەبێت.

$$\begin{cases} y = 0.18x + 22.12 \\ y = 0.18x + 20.24 \end{cases}$$



بۆ ئەوەی وەڵام بدۆزیتەوە، سستەمەکە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە، نواندنی دوو هاوکێشەکە بە ڕوونکردنەوەیی دوو ڕاستەهێڵی تەریبمان بۆ دەردەچێت واتا سستەمەکە ئەستەمە، وە ئەگەر ئەم کارە بەم شێوەیە بەردەوامبێت ئەوا هیچ هیوایەك نییە کە تەمەنی هاوسەرگیری لای کوڕەکان و کچەکان یەکسان بێت.

هەوڵبدە سیستمی $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 18x - 2y = 4 \end{cases}$ بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە پاشان شیکارەکە پاسادان بکە.

ڕاهێـــــــنـــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ڕوونیبکەوە چۆن بە ڕوونکردنەوەیی سیستمی $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 4y = -9 \end{cases}$ شیکار دەکەیت.

2 چۆن بە ڕوونکردنەوەیی سیستمی $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$ دەنوێنیت؟ چۆن شیکارەکە دەخەمڵێنی بە ڕوانین بۆ وێنە ڕوونکردنەوەییەکە، بۆچی پێویستە ڕاستی خەمڵاندنەکەت بسەلمێنی؟

3 ڕوونیبکەوە چۆن ڕێسای نەخشەیەکی هێڵی دەدۆزیتەوە بە زانینی وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

هەریەك لەو سیستمانە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە

4 $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$ **5** $\begin{cases} y + 2x = 0 \\ 2y = -x - 9 \end{cases}$ **6** $\begin{cases} 2x + 3y = -12 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

هەر سیستمێك بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنەو شیکارەکە بخەمڵێنە. خەمڵاندنەکەت نزیکبکەوە بۆ نزیکترین بەش لە دە.

7 $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 2 \\ y = -\frac{2}{3}x \end{cases}$ **8** $\begin{cases} 2y - x = 6 \\ 3x + y = -5 \end{cases}$

9 لانە 5000 دیناری پێیە لە پارچەکانی 250 دیناری و 500 دیناری. ژمارەی هەریەك لە پارچەکان لەهەر چەشنێك چەندە، ئەگەر ژمارەی هەموو پارچەکان 17 پارچە بێت؟

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

هەر سیستمێك پۆلین بکە.

10 $\begin{cases} x-y=-4 \\ 3x+y=8 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 3x+4y=12 \\ 4y-12=-3x \end{cases}$

بە ڕوونکردنەوەیی هەریەك لەو سیستمانە بنوێنە و پۆلینیان بکە. شیکارەکە بە ڕوونکردنەوەیی دیاریکە کاتێك سیستمەکە دیاریکراو بێت.

12 $\begin{cases} 6x+4y=12 \\ 2y=6-3x \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x+4y=-10 \end{cases}$

14 $\begin{cases} y=2x-1 \\ 6x-y=13 \end{cases}$

15 $\begin{cases} x+3y=13 \\ 2x-3y=-9 \end{cases}$

16 $\begin{cases} y=-2x-7 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

18 $\begin{cases} -\frac{1}{2}x+y=4 \\ x+2y=8 \end{cases}$

19 $\begin{cases} 3x-6y=9 \\ \frac{1}{2}x=y+\frac{3}{2} \end{cases}$

20 $\begin{cases} 4x+5y=-7 \\ 3x-6y=24 \end{cases}$

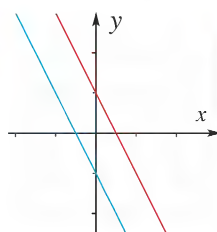
21 $\begin{cases} -x+2y=3 \\ 2x-4y=-6 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 3x-y=2 \\ -3x+y=1 \end{cases}$

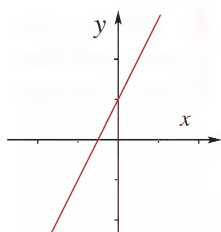
23 $\begin{cases} 6x-3y=9 \\ 3x+7y=47 \end{cases}$

ئەو سیستمەی بە ڕوونکردنەوەیی نوێنراوە پۆلین بکە و شیکارەکەی بنووسە ئەگەر تاقانە بوو.

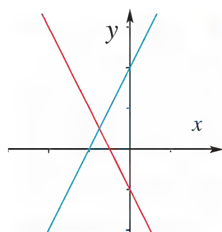
24



25



26



27 ئایا ئەم جووتە ڕێکخراوە شیکاری سیستمەکە پێکدێنێ؟

أ (1 ، 3) $\begin{cases} 5x+2y=11 \\ x-y=11 \end{cases}$

ب $(5, -2)$ $\begin{cases} 4x-3y=26 \\ 2x+y=8 \end{cases}$

ج (2 ، 1) $\begin{cases} 2x-y=8 \\ x+3y=5 \end{cases}$

د (5 ، 2) $\begin{cases} 4x-2y=16 \\ -8x+4y=-32 \end{cases}$

هـ یەکێك لەو چوار سیستمەی پێشوو دیاریکراو نییە. بیدۆزەوە، پاشان سێ جووتە ڕێکخراوی تر بنووسە کە شیکارین بۆ سیستمەکە.

ئەندازە باخێکی لاکێشەیی چێوەکەی 130m، سێ ئەوەندەی درێژییەکەی دەکاتە دە ئەوەندەی پانیەکەی.

28 درێژی و پانی باخەکە هەژماربکە

29 ڕووبەرەکەی هەژمار بکە

30 **فڕۆکەوانی** فڕۆکەیەك لە بەرزی 7000m ، نزمبووەوە بە تێکڕای 450m لە خولەکێکدا، فڕۆکەیەکی تر لە بەرزی 375m بەرزدەبێتەوە بە تێکڕای 575m لە خولەکێکدا، سستەمێك لە دوو هاوکێشەی هێڵی بنووسە ڕێگابدات بە هەژمارکردنی ژمارەی خولەکەکان پێش ئەوەی هەردوو فڕۆکەکە لەهەمان بەرزی دابن سستەمەکە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

ڕوانین بۆ دواوە

31 ئازاد لە شوێنی فرۆشتنی کەلوپەلەکانی کارەبا کاردەکات، بەڕێوەبەرەکەی دوو ڕێگای خستەڕوو بۆ هەڵبژاردنی کرێیەکەی:

- 200 000 دینار+ % 5 لەسەرجەمی فرۆشتنەکانی.
- % 7 لەسەرجەمی فرۆشتنەکانی.

ئەو نەخشەیە بنووسە بۆ هەژمارکردنی کرێیەکە لەهەر بارێکدا وێنەی ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە.

کام ئاستی فرۆشتنەکان وادەکات کرێیەکان وەك یەکبن؟

ڕوانین بۆ پێشەوە

32 ئەو سستەمەی دێت بە ڕوونکردنەوەی شیکاربکە کە پێکهاتووە لە هاوکێشەیەکی هێڵی و ئەوی تریان هێڵی نییە.

$$\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = 4x \end{cases}$$



سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان

Systems of Linear Inequalities

بەشی 4

وانەکان

1. لاسەنگە هێڵییە یەك نەزانراوەکان.
2. لاسەنگە هێڵییە دوو نەزانراوەکان.
3. سستەمی لاسەنگە هێڵییەکان.

هەنگاونان بەرەو باشتر

زۆر چالاکی ئابوری بۆدانانی پلانی کردارەکانی پشت بە شیکارکردنی سیستەمی لاسەنگە هێڵییەکان دەبەستن.

لاسەنگە هێڵییە یەك نەزانراوەكان

Linear Inequalities in one unknown

وانەی 1

بۆچی؟

دەتوانین زۆر لە پرسیارەكانی ژیانی ڕۆژانە بە بەكارهێنانی لاسەنگەكان شیكاربكەین. نموونەش بۆ ئەمە ڕێژەی چەورییە كە پێویستە مرۆڤ لە خواردنیدا تێپەڕ نەكات بۆئەوەی توشی سەرئێشە نەبێت.



ئامانجەكان

- نوسینی لاسەنگەی هێڵی بە یەك گۆڕاو دەنووسێت و بە جەبری و ڕوونكردنەوەیی شیكاریدەكات.
- لاسەنگە هێڵییە ئاوێتەكان بە یەك گۆڕاودا شیكاردەكات بە جەبری و ڕوونكردنەوەیی.
- پرسیارەكان بە بەكارهێنانی لاسەنگەكان شیكاردەكات.

زاراوەكان Vocabulary

لاسەنگە inequality

كۆمەڵەی شیكار solution set

لاسەنگەی ئاوێتە compound inequality

جێبەجێكردن

خۆراك

یەك لە لێكۆڵینەوەكان دەریخستووە كە ئەو كەسانەی بڕی چەوری كەمدەكەنەوە لە خواردنەكانیاندا كەمتر لە 20% لە بەهای گەرمۆكەی گەرمی خواردنەكانیاندا، كەمتر توشی سەرئێشان دەبن. ئەگەر هێمای c بۆ گەرمۆكەی گەرمی خواردنی تاكە كەس دابنرێت پێویستە ژمارەی گەرمۆكەی چەوری F زیاتر نەبێت لە 20% ی c . ئەمە بە ڕێگەی دەستەواژەی بیركاری $F \le 0.2c$ دەردەبڕێت.

نموونەی ئەم دەستەواژەیە پێی دەوترێت **لاسەنگە Inequality** . (بەشێوەیەكی گشتی هەر دەستەواژەیەكی بیركاری ئەم هێمایەی ($\le$;$\ge$;$<$;$>$) تێدابێت دەبێتە لاسەنگە).

بۆ شیكاركردنی لاسەنگەكان سیفەتی لاسەنگە لە ژمارە ڕاستییەكاندا بەكاربهێنە.

سیفەتەكانی لاسەنگە Properties of inequality	
سیفەتی كۆكردنەوە **Addition Property**	ئەگەر $a \le b$ ئەوا $a+c \le b+c$
سیفەتی لێدەركردن **Subtraction Property**	ئەگەر $a \le b$ ئەوا $a-c \le b-c$
سیفەتی لێكدان **Multiplication Property**	ئەگەر $a \le b$ ئەوا $ac \le bc$ كاتێك $c > 0$
	ئەوا $ac \ge bc$ كاتێك $c < 0$
سیفەتی دابەشكردن **Division Property**	ئەگەر $a \le b$ ئەوا $\frac{a}{c} \le \frac{b}{c}$ كاتێك $c > 0$
	ئەوا $\frac{a}{c} \ge \frac{b}{c}$ كاتێك $c < 0$

ئەم سیفەتانەی سەرەوە بەڕاستی دەمێننەوە بە بەكارهێنانی هێماكانی تری لاسەنگە.

كۆمەڵەی شیكاری لاسەنگە Solution Set بریتییە لە كۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەكان كە وا دەكات لاسەنگەكە ڕاست بێت بە لەجیاتیدانان.

بۆ نموونە دووژمارەی ڕاستی $\frac{1}{2}$، 1− دوو شیکارن بۆ لاسەنگەی $6x+1<13$ چونکە بە لەجیاتیدانانی هەریەکێك لەم دوو ژمارەیە لەجیاتی نەزانراوی x دوو لاسەنگەی ژمارەیی ڕاستت دەداتێ:

$6x+1<13$	$6x+1<13$
$6\left(\frac{1}{2}\right)+1\overset{?}{<}13$	$6(-1)+1\overset{?}{<}13$
$3+1\overset{?}{<}13$	$-6+1\overset{?}{<}13$
$4\overset{?}{<}13$ ڕاستە	$-5\overset{?}{<}13$ ڕاستە

هەوڵبدە ئایا دەتوانیت هەندێ شیکاری تر بۆ لاسەنگەکەی پێشوو بدۆزیتەوە؟ بە لەجیاتیدانان پاسادان بکە.

نموونە 1 لاسەنگەی $4x-5\geq 13$ شیکاربکە.

شیکار

$4x-5\geq 13$	لاسەنگەیە
$4x-5+5\geq 13+5$	سیفەتی کۆکردنەوە بەکاربهێنە
$4x\geq 18$	سادەبکە
$x\geq \frac{18}{4}=4.5$	سیفەتی دابەشکردن بەکاربهێنە

کۆمەڵەی شیکار بریتییەلە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان لە 4.5 کەمتر نەبێت.

هەوڵبدە لاسەنگەی $-4<7-3x$ شیکاربکە. کۆمەڵەی ژمارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

دەتوانیت کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی یەك گۆڕاو لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنیت ئەم وێنەی خوارەوە کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $4x-5\geq 13$ دەنوێنێت.

بازنە بچووکە پڕکراوەکە ئەوە دەگەینێت کە 4.5 سەر بە کۆمەڵە شیکارەکەیە



نموونە 2 لاسەنگەی $4-3x>16-x$ شیکاربکە.

شیکار

$4-3x>16-x$	لاسەنگەیە
$4-3x+x>16-x+x$	سیفەتی کۆکردنەوە بەکاربهێنە
$4-2x>16$	سادەبکە
$4-2x-4>16-4$	سیفەتی لێدەرکردن بەکاربهێنە
$-2x>12$	سادەبکە
$\frac{-2x}{-2}<\frac{12}{-2}$	سیفەتی دابەشکردن بەسەر ژمارەیەکی سالب بەکاربهێنە
$x<-6$	سادەبکە

بازنە بچووکە بەتاڵەکە ئەوە دەگەینێت کە 6− سەربە کۆمەڵەی شیکار نییە



هەوڵبدە لاسەنگەی $5-7b>8-4b$ شیکاربکە.

نموونە

جێبەجێکردن

ئەزموونەکان

3 نمرەی کۆتایی خوێندکار لە نمرەی تاقیکردنەوە بەڕێژەی دووسێیەك لە نمرەی تاقیکردنەوە و ئەرکی ماڵەوە بەڕێژەی سێیەك دیاریدەکرێت. لە یەکێك لە خوێندنگاکاندا نمرەی دابان لە تاقیکردنەوەی مێژوودا 90% بێت. **کەمترین نمرەی ئەرکی ماڵەوە کە پێویستە دابان وەریبگرێت چەندە بۆئەوەی نمرەی کۆتایی لە 93% کەمتر نەبێت.**

شیکار

بۆت هەیە پێدراوی پرسیارەکە بەم شێوەیەی خوارەوە بنوسیت:

$$\text{نمرەی کۆتایی} = \frac{1}{3}\left(\text{نمرەکانی ئەرکی ماڵەوە}\right) + \frac{2}{3}\left(\text{نمرەکانی تاقیکردنەوە}\right)$$

یان $f = \frac{2}{3}(90) + \frac{1}{3}h$ کە f نمرەی کۆتاییە، h نمرەی ئەرکی ماڵەوەیە بۆئەوەی f لە 93 کەمترنەبێت پێویستە h شیکاری ئەم لاسەنگەی خوارەوە پێکبێنێت:

$$93 \leq \frac{2}{3}(90) + \frac{1}{3}h$$

ئەم لاسەنگە شیکاربکە:

$93 \leq \frac{1}{3}h + 60$	سادەبکە
$93 - 60 \leq \frac{1}{3}h + 60 - 60$	سیفەتی لێدەرکردن بەکاربهێنە
$33 \leq \frac{1}{3}h$	سادەبکە
$3 \times 33 \leq 3 \times \frac{1}{3}h$	سیفەتی لێکدان بەکاربهێنە
$99 \leq h$	سادەبکە

کەواتە پێویستە نمرەی ئەرکی ماڵەوە لە 99 کەمترنەبێ بۆئەوەی نمرەی کۆتایی لە93 کەمترنەبێت

چالاکی

دۆزینەوەی شیکاری لاسەنگەکان بە ڕوونکردنەوەیی Exploring Inequalities Grayphically

1. لاسەنگەی $2x - 3 < 3$ شیکاربکە.

2. لەهەمان ڕووتەختی پۆوتان وێنەی دوو ڕاستەهێڵی $y = 2x - 3$ و $y = 3$ بکێشە.

3. بەهاکانی گۆڕاوی x دیارییکە کە وادەکات خاڵی سەربەڕاستەهێڵی $y = 3$ بەرزتربێت لەو خاڵەی کە دەکەوێتە ڕاستەهێڵی $y = 2x - 3$.

4. ڕونییکەوە چۆن وەڵامی پرسیارەکەی پێشوو یارمەتیت دەدات بۆ شیکارکردنی لاسەنگەکە.

خاڵی چاودێری √

5. شیکاری لاسەنگەی $3x + 2 > 5$ بە ڕوونکردنەوەیی بکە، هەنگاوەکانی ڕوونبکەوە کە پێیان دەگەیتە شیکار.

بیری ڕەخنەگر

ئایا ڕێگاکەی پێشوو بۆ شیکارکردنی لاسەنگەی $2x - 3 > x + 4$ دەشێت هەروەها بۆ لاسەنگەی $4 \geq 3x + 1$ ؟ ڕونییکەوە.

لاسەنگە ئاوێتەکان Compound Inequalities

دانا ئەنجامی پشکنینی ڕێژەی شەکری لە خوێنەکەی خۆیدا خوێندەوە. لەسەری نوسرابوو کە ئەم هێندە s پێویستە کەمتر نەبێت لە 750 ملگم لە لیترێکدا و زیاتر نەبێت لە 1100 ملگم لە لیترێکدا. کەواتە پێویستە s پاسادانی هەردوو مەرجی $s \geq 750$ و $s \leq 1100$ بکات، واتە شیکاری هاوبەشی هەردوو لاسەنگەی $x \geq 750$ و $x \leq 1100$ دەبێت.

کاتێك دوو لاسەنگە دەبەسترێنەوە بە ئامرازی یەکتربەستن «و» $\wedge$ لاسەنگەیەکی ئاوێتەمان **Compound Inequality** دەستدەکەوێت. بۆ شیکارکردنی لاسەنگەیەکی ئاوێتە کە بە ئامرازی «و» $\wedge$ بەیەکەوە بەستراون، دەسبکە بە شیکارکردنی هەریەکە لەدوو لاسەنگەکە بەجیا و شیکارە هاوبەشەکەیان وەربگرە. واتە کۆمەڵەی شیکارکردنی دوولاسەنگەی ئاوێتە بە ئامرازی بەیەکتر بەستنی «و» $\wedge$ بریتییە لە کۆمەڵەی یەکتربڕینی هەردوو کۆمەڵەی شیکاری دوو لاسەنگەکە کە بەجیا.

نموونە 4

شیکاری $(3x-4\le 17)\wedge(2x+1\ge 3)$ بکەو کۆمەڵە شیکاری لەسەر تەوەری(هێڵی)ژمارەکان بنوێنە

شیکار

$3x-4\le 17$	$\wedge$	$2x+1\ge 3$
$3x\le 21$	$\wedge$	$2x\ge 2$
$x\le 7$	$\wedge$	$x\ge 1$

کۆمەڵەی شیکاری ئەم لاسەنگە ئاوێتەیە بریتییە لە کۆمەڵەی بەهاکانی x کە پاسادانی $1\le x\le 7$ دەکات. و لەسەر (تەوەری) ژمارەکان بەم شێوەیە دەنوێنرێت.



دەتوانین کۆمەڵەی شیکاری نموونەی پێشوو بەم شێوە دەربڕین $1\le x\le 7$ بەشێوەیەکی گشتی دەتوانی $(x>a)\wedge(x<b)$ بەشێوەی $a<x<b$ دەربڕین.

هەوڵبدە

شیکاری $(x-5>-12)\wedge(-2x+5\ge 3)$ بکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

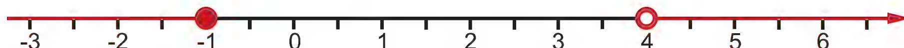
جۆرێکی تری لاسەنگە ئاوێتەکان ئەوانەن کە بەئامرازی «یان» «$\vee$» دوو لاسەنگەکە دەبەسترێنەوە. کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی ئاوێتەکە بەئامرازی «یان» «$\vee$» بەستراونەتەوە بریتییە لە یەککرتنی هەردوو کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەکان هەریەکەیان بەجیا.

نموونە 5

شیکاری $(3x+2\le -1)\vee(5x+1>21)$ بکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

شیکار

$3x+2\le -1$	$\vee$	$5x+1>21$
$3x\le -3$	$\vee$	$5x>20$
$x\le -1$	$\vee$	$x>4$



هەوڵبدە

شیکاری $(7x+1>36)\vee(2x\le 5)$ بکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 هەنگاوەکانی نواندنی کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $7x-7>0$ لەسەر تەوەری ژمارەکان ڕوونبکەوە.

2 کۆمەڵەی شیکاری $7x-7>0$ بەچی جیاوازە لە کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $7x-7\geq 0$
کۆمەڵەی شیکاری $7x-7>0$ بەچی جیاوازە لە کۆمەڵەی شیکاری $7x-7<0$.

3 ئایا هەردوو لاسەنگەی $x<16$ و $-x>-16$ هەمان کۆمەڵەی شیکاریان هەیە؟ ڕوونیبکەوە.

4 دەستەواژەی « x ژمارەیەکی سالب نییە» چۆن دەنووسرێت بە بەکارهێنانی ئامرازەکانی لاسەنگە .

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

5 لاسەنگەی $3x+1<13$ شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

6 لاسەنگەی $a+4<4a-11$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکارەکەی لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

جێبەجێکردن

7 **ئەزموونەکان** نمرەی کۆتایی خوێندکاران لەیەکێك لە خوێندگاکاندا بە نمرەی ئەزموونەکان بەڕێژەی $\frac{3}{4}$ و نمرە کۆششی ڕۆژانە بەڕێژەی $\frac{1}{4}$ دیاریدەکرێت. ئەگەر نمرەی ڕامان لە کۆششی ڕۆژانەدا 92% بێت ئەوا نزمترین نمرەی ڕامان کە دەبێت وەریبگرێت لە ئەزموونەکاندا بۆ ئەوەی نمرەی کۆتایی 80% کەمتر نەبێت چەندە؟

8 شیکاری لاسەنگەی $(2x+3<15)\wedge(3x-7\geq -13)$ بکە و کۆمەڵەی شیکارەکەی لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

9 شیکاری لاسەنگەی $(4x-6<14)\vee(2x+4\leq -10)$ بکە و کۆمەڵەی شیکارەکەی لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

لاسەنگەیەك بنووسە بگونجێ لەگەڵ شیکاری نوێنراو لەسەر تەوەری ژمارەکان.

10 **11**



12 **13**



ئەم لاسەنگانە شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکانیان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

14 $5x<10$

15 $-5x>10$

16 $-5x<-10$

17 $a+4<10$

18 $\frac{1}{2}a-1\geq -15$

19 $\frac{1}{5}b-2\leq 28$

20 $-x+8<41$

21 $-5x-15\leq 60$

22 $\frac{y}{2}\leq 10$

23 $-\frac{y}{32}<2$

24 $-6(b+4)<12$

25 $6-(4a-3)\geq 8$

26 $4y-12>7y-15$

27 $3(4y-5)<8y+3$

28 $-4x-3<-6x-17$

29 $-5(3x+2)\geq 4(x-1)$

شیکاری ئەم لاسەنگە ئاوێتانە بکە و کۆمەڵەی شیکارەکانیان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

30 $(x>-4)\wedge(x<2)$

31 $(x>-4)\wedge(x>2)$

32 $(x>-4)\vee(x>2)$

33 $(x>-4)\vee(x<2)$

34 $(x<-4)\wedge(x>2)$

35 $(x<-4)\wedge(x<2)$

36 $(x<-4)\vee(x<2)$

37 $(x<-4)\vee(x>2)$

جێبەجێکردن



38 **کاری خێرخوازی** یەکێك لە دامەزراوە خێرخوازەکان بڕیاریدا کە ڕاکێشانێکی خێرخوازی ئەنجامبدات لەسەر ئۆتۆمبیلێك کە یەکێك لە کۆمپانیاکان بەخشیبووی. دامەزراوە خێرخوازەکە پێشبینی دەکرد 1250 بلیت بەلایەنی کەمەوە بفرۆشێت بەهیوای دەستکەوتنی 21 000 000 دینار. کەمترین نرخ بۆ بلیتێك چەندە ئەگەر بزانی تێچوونی ڕێکلامەکان 1500 000 دینار بێت.

39 تێچوونی بەرهەمهێنانی کاڵایەکی دیاریکراو بریتییە لە $C=40x+868$ و داهاتی فرۆشتن بریتییە لە $R=54x$ ، هێمای x بریتییە لە ژمارەی یەکەکانی بەرهەمهێنراو. C هێمای تێچوونی بەرهەمی ئەو یەکانەیە.

أ) لاسەنگەیەك بنووسە دەستکەوتی قازانجەکان دەرببڕێت.

ب) بەلایەنی کەم دامەزراوەکە پێویستە چەند یەکە بفرۆشێت بۆئەوەی زیان نەکات.

ج) شیکاری لاسەنگەی پێشوو بە ڕوونکردنەوەیی بکە.

ڕوانین بۆ دواوە

شیکاری ئەم هاوکێشە پێتیانە بکە بە هەژمارکردنی نەزانراوی ناو دووکەوانە کە بەپێی نەزانراوەکانی تر.

40 $A=p+prt$ (t)

41 $SA=2ab+2ac+2bc$ (a)

ڕوانین بۆ پێشەوە

42 دوو جووتە ڕێکخراوی (x, y) بدۆزەوە کە شیکاری لاسەنگەی $2x+3y<10$ بن.

وانەی 2



لاسەنگە هێڵییە دوو نەزانراوەکان

Linear inqualities in two unknowns

بۆچی؟ بەڕێوەبەرانی مەڵبەندەکانی شانۆ لاسەنگە هێڵییەکان بەکاردێنن بۆ دیاریکردنی ژمارەی پلیتەکانی چوونەژوورەوە کە بە نرخی جیاجیا دەیانفرۆشن بۆ دەستکەوتنی قازانج بەکاردێنن (نموونە 3)

ئامانجەکان

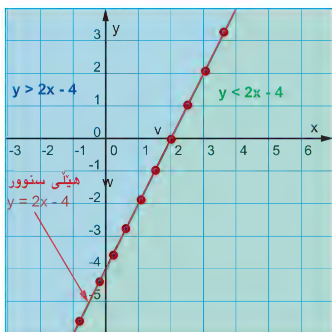
- لاسەنگەی هێڵییە دوو نەزانراوەکان بە ڕوونکردنەوەیی شیکاردەکات.
- پرسیارەکان بە بەکارهێنانی لاسەنگەی هێڵییە دوو نەزانراوەکان شیکاردەکات. .

زاراوەکان
Vocabulary

لاسەنگەی هێڵی
Linear inequality

هێڵی سنوور
Boundary line

نەخشەی هێڵی بنچینەی لاسەنگەی دوو نەزانراو پێکدێنێت. **لاسەنگەی هێڵی بە دوو نەزانراو Linear inequality in two unknowns** بریتییە لە دەربڕینی پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاوکە یەکێ لەهێماکانی لاسەنگەی تێدابێت وەك $y > 2x - 4$. کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی هێڵی دوو نەزانراو بریتییە لە هەموو ئەو جووتە ڕێکخراوانەی (x,y) کە پاسادانی لاسەنگەکە دەکەن. هەروەها ئەو خاڵانەی کە شیکارە جیاوازەکانی لاسەنگەکە دەنوێنێ بەشێك لە ڕووتەختی پۆوتانەکان پێکدێنێت. کە سنوردارە بە ڕاستەهێڵێك کە ڕووتەختەکە دەکاتە دوو بەش. بۆ نموونە ڕاستەهێڵی $y = 2x - 4$ ڕووتەختی پۆوتانەکان دەکاتە دوو بەش وەك لەوێنەکەدا دیارە. پۆوتانی هەموو خاڵەکان پاسادانی یەکێ لەبەشەکانی لاسەنگەی $y > 2x - 4$ دەکات، بەڵام خاڵەکانی بەشەکەی تر پاسادانی لاسەنگەی $y < 2x - 4$ دەکات بەشی یەکەم لەوێنەکە (بەشی سەرەوە) کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەکە $y > 2x - 4$ دەنوێنێت پێی دەوترێت (ناوچەی شیکار) بۆئەو لاسەنگەیە. و ڕاستەهێڵی $y = 2x - 4$ پێی دەوترێت هێڵی سنوور بۆ **ناوچەی شیکار**.



هێڵی سنوور دەبێت بە خاڵ خاڵ بکێشرێت بۆ دەربڕینی کە خاڵەکانی سەر بەناوچەی شیکارنین.
بۆ شیکارکردنی لاسەنگەی $y > 2x - 4$ هێڵی سنوور بەخاڵ خاڵ بکێشە و ناوچەی سەرەوە سێبەراوی بکە (دیاریبکە کە ناوچەی شیکارە).

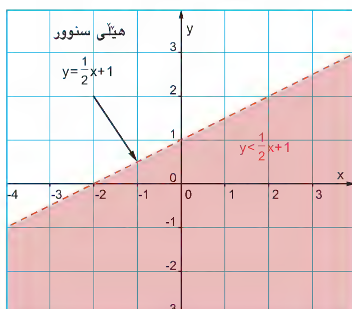
نموونە 1

لاسەنگەی $y < \frac{1}{2}x + 1$ شیکاربکە.

شیکار

(أ) $y < \frac{1}{2}x + 1$

ڕاستەهێڵی $y = \frac{1}{2}x + 1$ هێڵی سنوورە و لارییەکەی دەکاتە $\frac{1}{2}$ یەکتربڕینی ئەستوونیەکەی 1 ـە. هێڵی سنوور بە خاڵ خاڵ بکێشە. چونکە بەشێك نییە لە ناوچەی شیکار.
ئەو ناوچەی دەکەوێتە خوار هێڵە سنوورییەکە ڕەنگ بکە.



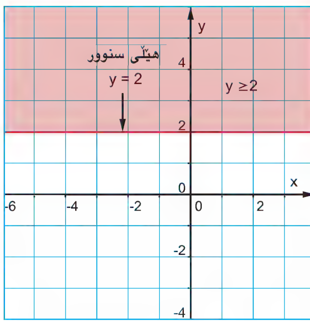
پاسادان خاڵێك هەڵبژێرە کەوتبێتە ناوچەی شیکار، بۆ نموونە وەك خاڵی $(0,0)$. و تاقیبکەوە ئایا دەبێتە شیکاری لاسەنگەکە.

بۆ نموونە وەك $y < \frac{1}{2}x + 1$

$0 \overset{?}{<} \frac{1}{2}0 + 1$

$0 \overset{?}{<} 1$ ✓

لەبەرئەوەی خاڵی هەڵبژێراو پاسادانی لاسەنگەکە دەکات، کەواتە ناوچە ڕەنگکراوەکە ناوچەی شیکارە.



(ب) **شیکاری لاسەنگەی $y \geq 2$ بکە.**
دەزانیت کە ڕاستەهێڵی $y = 2$ ڕاستەهێڵێکی ئاسۆییە.
هەنگاوی 1 ڕاستەهێڵێك بکێشە بە هێڵی نەپچراو
چونکە هێڵی سنوور بەشێکە لە ناوچەی شیکارەکە.
هەنگاوی 2 ناوچەی سەرووی هێڵی سنوور ڕەنگ
بکە بۆ دیاریکردنی ئەو خاڵانەی کە $y > 2$
ساغکردنەوە خاڵی $(0,4)$ سەربە ناوچەی شیکارە
چونکە $4 \geq 2$. سەرنجبدە کە ئەو خاڵانەی دەکەونە سەر هێڵی سنوور و یان
سەرووی، شیکاری لاسەنگەکە دەنوێنن بەبێ ڕەچاوکردنی بەهای x .

هەوڵبدە بە ڕوونکردنەوەیی ئەم لاسەنگانە شیکاربکە، $y \geq 3x-2$ و $y < -3$.

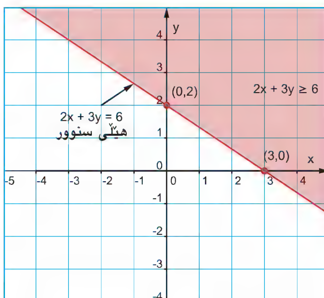
ئەگەر هاوکێشەی هێڵی سنوور بە شێوەی لاری – یەکتربڕین نەنوسرابوو دەتوانین خاڵێکی تاقیکردنەوە وەربگرین کە نەکەوتبێتە سەر هێڵی سنوورەکە بۆ دیاریکردنی کە کام ناوچە دەبێ سێبەراوی بکەین. ئەگەر خاڵەکە پاسادانی لاسەنگەکەی کرد ئەوا ئەو ناوچەیە ڕەنگ بکە، ئەگەر نا ئەوا ناوچەکەی تر ڕەنگ بکە.

نموونە 2 **ئەم لاسەنگەیە شیکاربکە بە بەکارهێنانی یەکتربڕینی لەگەڵ دوو تەوەری پۆوتانەکان.** $2x+3y \geq 6$

شیکار

هەنگاوی 1 یەکتربڕینەکان دیاریبکە.
لەجیاتی x سفر دابنێ و لەدواییدا و لەجیاتی y سفر دابنێ بۆ دۆزینەوەی یەکتربڕینی هێڵی سنوور لەگەڵ تەوەرەکاندا.

یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری دووەم (ستوونی)	یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری یەکەم (ئاسۆیی)
$2x+3y=6$	$2x+3y=6$
$2\times 0+3y=6$	$2x+3\times 0=6$
$3y=6$	$2x=6$
$y=2$	$x=3$



هەنگاوی 2 هێڵی سنوور بکێشە کە بریتییە لەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵی $(0,2)$ و $(3,0)$ دادەڕوات، ئەم ڕاستەهێڵە بە هێڵی نەپساو بکێشە لەبەرئەوەی بەشێکە لە ناوچەی شیکار.

هەنگاوی 3 ئەو ناوچەیە دیاریبکە کە پێویستە ڕەنگی بکەی.
تاقیبکەوە ئایا خاڵی $(0,0)$ سەربە ناوچەی شیکارە. لەبەر ئەوەی لاسەنگەی $0+0 \geq 6$ چەوتە کەواتە خاڵەکە سەربە ناوچەی شیکارنییە. کەواتە دەبێت ناوچەی سەرەوەی هێڵی سنوور ڕەنگ بکەیت.

هەوڵبدە بە ڕوونکردنەوەیی لاسەنگەی $3x-4y>12$ شیکاربکە بە بەکارهێنانی یەکتربڕینی ئاسۆیی و ستوونی.

نموونە



3 جێبەجێکردنی بازرگانی

لە شانۆگەریەکدا بلیتی چوونەژوورەوەی گەورەکان 8000 دینارە و بلیتی منداڵان 5000 دینارە. لە ئاهەنگێکدا بەڕێوەبەری شانۆ 000 240 دینار لەهەر شانۆگەریەك خەرج دەکات. ئایا دەبێت چەند پلیتی چوونە ژوورەوە بفرۆشێت لەهەر جۆرێکیان بۆ بەدەستهێنانی قازانج؟ بەڕێوەبەرەکە 20 پلیتی منداڵانی فرۆشت ئایا دەبێت چەند پلیتی گەوران بفرۆشێت بۆ بەدەستهێنانی قازانج.

1 لە پرسیارەکە تێبگە

شیکاری پرسیارەکە لەدوو بەش پێکدێت، نوسینی لاسەنگەیەك کە شیکارەکەی وەڵامی بەشی یەکەمی پرسیارەکەیە و شیکارکردنی ئەم لاسەنگەیە بەڕوونکردنەوەیی ئینجا دیاریکردنی ژمارەی پلیتی گەورەکان کە پێویستە بیفرۆشێت کاتێ 20 پلیتی منداڵانی فرۆشتوە.

پێدراوە گرنگەکان بنووسە:

- دوو جۆر پلیتمان هەیە گەورەکان 8000 دینار و منداڵان 5000 دینار
- نابێت کۆی پلیتەکانی فرۆشراون نرخەکەیان لە 000 240 دینار کەمتربێت.

2 پلان دابنێ

x بەکاربهێنە لەجیاتی ژمارەی پلیتی گەورەکان و y بەکاربهێنە لەجیاتی پلیتی منداڵان.
لاسەنگەیەك بنووسە کە پرسیارەکە دەنوێنێت.

نرخی بلیتی گەورە	×	ژمارەی بلیتی گەورە	+	نرخی بلیتی منداڵ	×	ژمارەی بلیتی منداڵ	≥	سەرجەم
8000	×	x	+	**5000**	×	**y**	≥	**240 000**

دەتوانین پرسیارەکە بەم لاسەنگەیە بنوێنین $8000x + 5000y \geq 240\ 000$ یان $8x + 5y \geq 240$

3 شیکار



یەکتربڕینی هێڵی سنوور لەگەڵ هەردوو تەوەرەکان

دیاریبکە $8 \times 0 + 5y = 240$ $\quad 8x + 5 \times 0 = 240$

$y = 48$ $\quad x = 30$

هێڵی سنوورەکەی بکێشە کە بریتییە لەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵی $(0{,}48)$؛ $(30{,}0)$دا دەڕوات. ئەو ناوچەیە سێبەراوی بکە کە بریتییە لە هەموو ئەو خاڵانەی دەکەونە چارەگی یەکەم و لەسەروی هێڵی سنوورەوەن چونکە ژمارەی بلیتەکان سالب نابن.

ئەگەر ژمارەی پلیتەکانی منداڵان کە فرۆشراون 20 پلیت بێت.

$8x + 5 \times 20 \geq 240$ لەجیاتی دابنێ

$8x + 100 \geq 240$ سادەبکە

$8x \geq 140$ کەواتە $x \geq 17{,}5$ دەبێت ژمارەی پلیتەکان ژمارەیەکی تەواوبێت.

کەواتە نابێت ژمارەی بلیتەکانی گەورەکان لە 18 بلیت کەمتربێت.

4 ساغکردنەوە

$18 \times 8000 + 20 \times 5000 = 244000$

هەوڵبدە بەڕێوەبەری بنکەیەکی ڕۆشنبیری بڕیاریدا دوو جۆر دیاری پێشکەشی ئەندامەکانی بکات. نرخی دیارییەك لە جۆری یەکەم 125 000 دینارە و نرخی جۆری دووەم 40 000 دینارە. کاتێ بەڕێوەبەر 1 500 000 دیناری دانابێت بۆ بەخشینی دیاری. ئایا دەتوانێت لەهەر جۆرێك چەند دانە بکڕێت؟ ئەگەر 4 پاداشتی لەجۆری یەکەم بەخشی چەند لەجۆری دووەم دەتوانێت ببەخشێ.

ڕاهێنــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 بەراورد لەنێوان دوو بازنەی بەتاڵ و پڕدا بکە لەنواندنی کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی هێڵی بەیەك نەزانراو بە ڕونکردنەوەیی هەروەها بەراورد لەنێوان دوو هێڵی سنووری خاڵ خاڵ و نەپساو لە کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی هێڵی بەدوو نەزانراودا بە ڕوونکردنەوەیی بکە.

2 باسی ناوچە شیکاری لاسەنگەی $x \geq 4$ بکە.

3 ڕونیبکەوە ئایا دەتوانی خاڵی $(0,0)$ بەکاربهێنیت وەك خاڵی تاقیکردنەوە بۆ دیاریکردنی ناوچەی شیکار کە پێویستە ڕەنگ بکەین لە شیکارکردنی لاسەنگەی $3x+5y \leq 0$.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 **زاراوەکان** ڕونیبکەوە چۆن دەکرێت ڕاستەهێڵی $y=3x-4$ ببێتە هێڵی سنووری.

ئەم لاسەنگانە بەڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

5 $y>-4$ **6** $y \leq 2$

7 $y \geq x-3$ **8** $y<-\frac{1}{3}x+2$

ئەم لاسەنگانە بە بەکارهێنانی یەکتربڕینی ئاسۆیی و ستوونی شیکاربکە.

9 $3x+2y>12$ **10** $5x-2y \leq 20$ **11** $-4x+5y<-20$

12 **بەکاربردن** سۆزان 17 000 دیناری پێیە بۆ کڕینی دوو جۆر پاکەتی قاوە کە ئامادەکردنی ئاسانە. جۆری یەکەم دەنکۆڵەکانی درشتن نرخەکەی 2290 دینار و جۆری دووەم دەنکۆڵەکانی وردن و نرخەکەی 3750 دینارە. هێمای x بۆ ژمارەی پاکەتەکانی جۆری یەکەم، و هێمای y بۆ ژمارەی پاکەتەکانی جۆری دووەم بەکاربهێنە.

أ لاسەنگەیەك بنووسە کەپرسیارەکە بنوێنێت و بە ڕوونکردنەوەیی شیکاری بکە بۆ دیاریکردنی ژمارەی ئەو پاکەتە قاوانەی کە سۆزان دەتوانێت لەهەر جۆرێکیان بیانکرێت.

ب چەند پاکەت لەجۆری یەکەم دەتوانێ بکڕێ ئەگەر زانیت 3 پاکەتی لە جۆری دووەم کڕیوە؟

13 **خوێندنگاکان** خوێندکارانی پۆلی یازدەیەمی وێژەیی هەڵسان بەفرۆشتنی دوو جۆر لە تابلۆی هونەری بۆ کۆکردنەوەی بڕە پارەیەك کەمتر نەبێت لە 000 280 دینار. جۆری یەکەم 1750 دینار قازانج دەکات جۆری دووەم 1250 دینار قازانج دەکات. هێمای x بۆ ژمارەی تابلۆیەکانی جۆری یەکەم و هێمای y بۆ ژمارەی تابلۆیەکانی جۆری دووەم دابنێ.

أ لاسەنگەیەك بنووسە ناوەڕۆکی پرسیارەکە بنوێنێت و بە ڕوونکردنەوەیی شیکاری بکە بۆ دیاریکردنی ژمارەی ئەو تابلۆیانەی کە دەتوانن خوێندکارەکان بیفرۆشن لەهەر جۆرێکیان.

ب خوێندکارەکان 100 تابلۆی هونەری لەجۆری دووەم و 50 لەجۆری یەکەمیان فرۆشت ئایا خوێندکارەکان ئامانجیان بەدەستهێناوە.

شیکاری هەر لاسەنگەیەك بەپێی y بکە و پاشان بە ڕوونکردنەوەیی شیکارییکە.

14 $\frac{1}{2}(6x-2y)\geq 4$ **15** $-\frac{3}{5}x+y\geq 2$ **16** $3(3x-y)>-12$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

بەڕێگای ڕوونکردنەوەیی شیکاری ئەم لاسەگانە بکە.

17 $y\geq 6$ **18** $y<x+4$ **19** $y>-\frac{2}{5}x-3$

ئەم لاسەنگانە بە بەکارهێنانی یەکتربڕینی ئاسۆیی و ستوونی شیکاربکە.

20 $4x+2y\geq 8$ **21** $3x-6y<12$

22 **بازارکاری** تێچوونی ڕیکلام لە ڕۆژنامەیەکی ناوخۆ 000 20 دینارە لە ڕۆژێکدا و تێچوونی لە ڕادیۆدا 000 50 دینارە بۆ هەر خولەکێك. ئەگەر بودجەی دابین کراو بۆ ڕیکلام لە یەکێ لە دەزگاکان یەك ملیۆن دینار بێت. هێمای نەزانراوی x بۆ ژمارەی ڕۆژەکانی ڕێکلام لە ڕۆژنامەدا و نەزانراوی y بۆ ژمارەی خولەکەکانی ڕێکلام لە ڕادیۆدا دابنێ و لاسەنگەیەکی هێڵی بنووسە کە پرسیارەکە بنوێنێت ئینجا شیکاری بکە بە ڕونکردنەوەیی.

23 **مۆبایل** سەردەم دوو جۆر لە کارتی مۆبایل دەفرۆشێت یەکیان بە 8000 دینارە و ئەویتریان بە 000 12 دینار. بە بەهای 000 200 دینار کارتی لەلا هەیە. هێمای x بۆ ژمارەی کارتی جۆری یەکەم و هێمای y بۆ ژمارەی کارتی جۆری دووەم دابنێ.

أ لاسەنگەیەکی هێڵی بنووسە کە پرسیارەکە بنوێنێت و بە ڕوونکردنەوەیی شیکارییکە.

ب سەردەم 10 کارتی لە جۆری 8000 دیناری فرۆشت چەند کارت دەتوانێت لەجۆرەکەی تر بفرۆشێت؟



شیكاری ئەم لاسەنگانە بەپێی y بكە و پاشان بە ڕوونكردنەوەیی شیكارەكەیان بدۆزەوە.

24 $-4y<4(3x-5)$ **25** $-3(-10x+2y)\geq 24$ **26** $-\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y\leq -1$

بە ڕوونكردنەوەیی شیكاری ئەم لاسەنگانە بكە.

27 $-4y>10x-20$ **28** $y-5\geq 4(x-2)$ **29** $6x+3y<0$

30 $y+\frac{3}{4}\leq\frac{5}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ **31** $\frac{9-3y}{2}\geq 6x$ **32** $x\leq 4$

33 $4x-5y<7x-3y$ **34** $2x-5y\leq -4x+15$ **35** $x>-2$

36 **خوێندنگاكان** تیپی بیركاری لەیەكێك لەئامادەییە نموونەییەكان ئاهەنگێكی گۆرانی سازدەكەن بۆ كۆكردنەوەی بڕێك پارە كە لە 600 000 دینار كەمتر نەبێت بۆ كڕینی ئامێرێكی كۆپیكردن تایبەت بە تیپەكە.سەرۆكی تیپەكە فەرمانیدا كە بلیتی چونەژورەوەی ڕۆژێك پێش ئاهەنگەكە بە 5000 دینار و نرخی 6000 دینار بێت ئەگەر لەبەر دەرگا كڕدرابێت.

أ | هێمای x بۆ ژمارەی بلیتەكانی ڕۆژێك پێش ئاهەنگەكە فرۆشراون دابنێ و هێمای y دابنێ بۆ ژمارەی بلیتەكانی لەبەر دەرگا فرۆشراون. لاسەنگەیەكی هێڵی بنووسە كە پرسیارەكە بنوێنێت و بە ڕوونكردنەوەیی شیكارییكە.

ب | ئەگەر بلیتەكانی پێش ئاهەنگەكە بەڕۆژێك فرۆشرابن 30 دانە بێت ئایا ژمارەی ئەو بلیتانەی لەبەر دەرگا پێویستە بفرۆشرێت چەندە بۆئەوەی تیپەكە بە ئامانجی خۆی بگات؟

37 **كۆكردنەوەی پارە** خوێندكارانی پۆلی یازدەیەم لەكاتی ئەنجامدانی یارییەكانی باسكە هەستان بە فرۆشتنی پیتزا و ساردەمەنی بۆئەوەی بڕی 150 000 دینار كۆبكەنەوە بۆ كڕینی دیارییەك بۆ مامۆستای بیركاری بەبۆنەی كۆتایی ساڵی خوێندن، ئەگەر لەهەر پیتزایەك 1250 دینار و لەهەر ساردەمەنییەك 500 دینار قازانج بكەن.
هێمای x بۆ ژمارەی پیتزاكان و y بۆ ژمارەی ساردەمەنیەكان دابنێ.

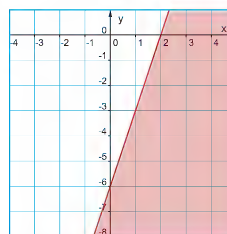
أ | لاسەنگەیەكی هێڵی بنووسە كە پرسیارەكە بنوێنێت.

ب | خوێندكارەكان 75 پیتزا و 150 ساردەمەنیان فرۆشت. ئایا دەتوانن دیارییەكە بكڕن؟

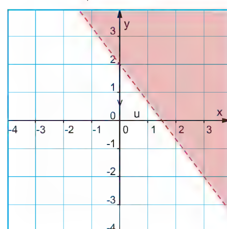
38 **بیری ڕەخنەگر** نرخی بلیتی چوونە ژورەوەی پاركێكی ئاژەڵان 5000 دینارە بۆ گەوران و 2000 دینارە بۆ منداڵان. بەهای پلیتە فرۆشراوەكان لە ڕۆژێكی هەفتەدا لە 300 000 دینار زیاتربوو. دڵشادو كاوە هەریەكەیان لاسەنگێكی هێڵییان نووسی بۆ نواندنی پرسیارەكەو شیكاركردنی بە ڕوونكردنەوەیی. دڵشاد هێمای نەزانراوی x بۆ ژمارەی پلیتەكانی گەوران دانا بەڵام دلێر هێمای x بۆ ژمارەی بلیتەكانی منداڵان دانا بۆیە هەردوو وێنە ڕونكردنەوەییەكەی كە ئەو دوو خوێندكارە كێشایان بۆ شیكارەكە جیاوازبوون؟ ئایا یەكێكیان هەڵەی كردووە؟ ئەگەر بە بەڵێ وەڵامتدایەوە كامیانە؟

لاسەنگەیەکی هێڵی دوونەزانراو بۆ هەریەك لەم وێنە ڕوونکردنەوەییانەی خوارەوە بنووسە.

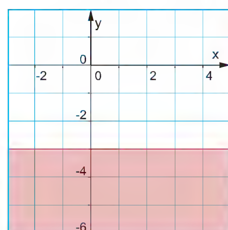
39



40



41



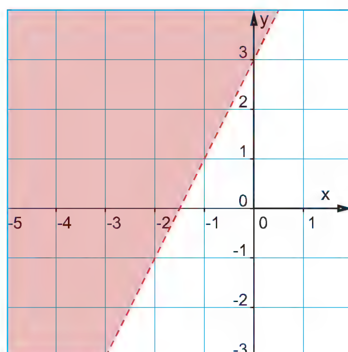
42 **بیری ڕەخنەگر** بەراوورد لەنێوان شێکاری ڕوونکردنەوەیی هەردوو لاسەنگەی $x+90>30y$ و $90>x+30y$ بکە لەچیدا پێکدەچن و لەچیدا جیاوازن؟

43 یانەی زانکۆ ئاهەنگێکی ئێوارەخوانی ساڵانە لەهۆڵی بۆنەکان ڕێکدەخات. دوو جۆر مێزیان داناوە بازنەیی و لاکێشەیی کە 8 کورسی لەدەوری مێزە بازنەییەکان و 6 کورسی لەدەوری مێزە لاکێشەییەکان دانراون. هێمای x بۆ ژمارەی مێزە بازنەییەکان و هێمای y بۆ ژمارەی مێزە لاکێشەییەکان دابنێ.

أ لاسەنگەیەکی هێڵی بنووسە کە پرسیارەکە بنوێنێت، ئەگەر ژمارەی کورسییەکانی پێویست لە 220 کەمتر نەبن و لاسەنگەکە بە ڕوونکردنەوەیی شێکاربکە.

ب بۆ ڕێك و پێکی هۆڵەکە وا باشە لە 300 کورسی زیاتر دانەنرێت. لاسەنگەیەك بنووسە کە ئەم مەرجە بنوێنێت و لاسەنگەکە بە ڕوونکردنەوەیی شێکاربکە.

ج بەراوورد لەنێوان دوو وێنە ڕوونکردنەوەییەکە بکە (لەچیدا جیاوازن).



44 کام لاسەنگە ئەم وێنەیەی بەرامبەر دەنوێنێت؟

(أ) $y<2x+3$ (ج) $y\geq 2x+3$

(ب) $4x-2y<-6$ (د) $4x+2y>6$

45 کام خاڵ سەربە ناوچەی شێکاری لاسەنگەی $5x-3y<30$ نین.

(أ) $(0,0)$ (ج) $(-5,3)$

(ب) $(3,-5)$ (د) $(-3,5)$

46 کام لاسەنگە هاوتای لاسەنگەی $7x-3y\geq 4$ (هەمان ناوچەی شێکاریان هەیە).

(أ) $y\leq \frac{7}{3}x-\frac{4}{3}$ (ج) $y\geq -\frac{7}{3}x-\frac{4}{3}$

(ب) $y\leq -\frac{7}{3}x+\frac{4}{3}$ (د) $y\geq \frac{7}{3}x+\frac{4}{3}$

47 کام لەم دووخاڵانە هەردوو یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی و ستوونی هێڵی سنووری لاسەنگەی $y\leq 3x-9$ دەنوێنێت؟

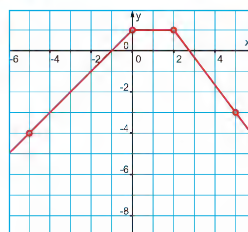
(أ) $(0,9)$ و $(3,0)$ (ج) $(0,9)$ و $(-3,0)$

(ب) $(0,3)$ و $(-9,0)$ (د) $(0,-9)$ و $(3,0)$

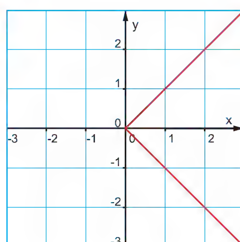
ڕوانین بۆ دواوە

تاقیکردنەوەی ڕاستەهێڵی ستوونی بەکاربهێنە بۆ ئەوەی بزانی کام لەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە نەخشە دەنوینێت. (بەشەکانی پێشوو)

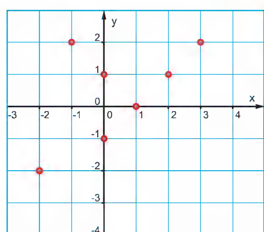
48



49



50



بە شێوەی لاری – یەکتربڕین هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە کە بە خاڵی $(1,-7)$ دا دەڕوات و:

51 بەخاڵی $(1,3)$ دا دەڕوات.

52 لارییەکەی 0.25

ڕوانین بۆ پێشەوە

53 وەستاندنی ئۆتۆمبیل لە گەراج بۆ ماوەی 8 خولەك بە 250 دینارە و بۆ ماوەی 20 خولەك بە 500 دینارەو ئەوپەڕی ماوەی وەستاندنی ئۆتۆمبیل 3 کاتژمێرە. کاتێ شوان ئۆتۆمبیلەکەی وەستاند زانی کە ژمێریاری گەراجەکە 37 خولەکی بە خۆڕایی پێ بەخشی. کام لەم پارچە پارانەی خوارەوە بەکاردێت بۆ وەستاندنی ئۆتۆمبیلەکەی شوان بۆ ماوەی 3 کاتژمێر.

(أ) 3 پارچەی 250 دیناری و 9 پارچەی 500 دیناری.

(ب) 13 پارچەی 250 دیناری و 2 پارچەی 500 دیناری.

(ج) 8 پارچەی 250 دیناری و 4 پارچەی 500 دیناری.

(د) 5 پارچەی 250 دیناری و 5 پارچەی 500 دیناری.



وانەی 3

سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان

System of Linear Inequalities

بۆچی؟

دۆزەرەوانی جەمسەری خوارووی سستەمی لاسەنگە هێڵییەکان بەکاردێنن بۆ دیاریکردنی ئەو خێراییەی پێویستە پێی بجووڵێن تا تووشی کەش و هەوای دژوار نەبنەوە (نموونە 2).

ئامانج

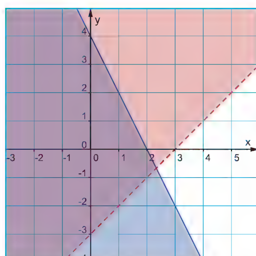
- سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی شیکار دەکات.

زاراوەکان
Vocabulary

سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان
System of linear inequalities

کاتێ لە پرسیارێکدا دەستەواژەی (گەورەتر لە) یان (پتر نییە لە) بەکاردێت، دەتوانیت لاسەنگە یان سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بەکاربهێنیت.

سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان System of linear inequalities بریتییە لە دوو لاسەنگەی هێڵی یان زیاتر کەهەمان ژمارەی نەزانراویان تێدایە. بەزۆری شیکاری سستەمی لاسەنگەی هێڵییەکان لە ژمارەیەکی ناکۆتا خاڵ پێکدێت کە دەتوانرێت بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنرێت بە سێبەراویکردنی ناوچەیەك لەڕووتەختی تەوەرەکان.کاتێ هەریەك لە لاسەنگەکان بەڕوونکردنەوەیی دەنوێنرێت لە ڕووتەختی پۆوتانەکان، ناوچە ڕەنگکراوەکان یەکتردەبڕن بۆ دیاریکردنی ناوچەی هاوبەش لەنێوانیان. ناوچەی شیکاری سیستمەکە بریتییە لەو ناوچە هاوبەشە.



نموونە 1

بە ڕوونکردنەوەیی ئەم سیستمە دوو لاسەنگە هێڵییە شیکاربکە.

شیکار

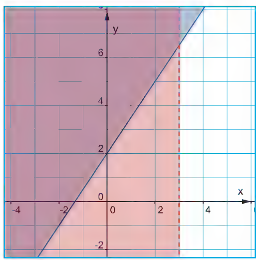
(أ) $\begin{cases} y \le -2x+4 \\ y > x-3 \end{cases}$

لە لاسەنگەی یەکەم وێنەی ڕاستەهێڵی $y=-2x+4$ بکێشە بە هێڵێکی نەپساو و ناوچەی ژێرەوەی سێبەراوی بکە. لە لاسەنگەی دووەم وێنە ڕاستەهێڵی $y=x-3$ بکێشە بە هێڵێکی خاڵ خاڵ و ناوچەی سەرووی ڕەنگ بکە. یەکتربڕینی دوو ناوچە سێبەراویکراوەکە دەبێتە ناوچەی شیکاری سیستمی دوو لاسەنگە هێڵییەکە.

پاسادان خاڵێك لە خاڵەکانی هەرناوچەیەك لە ڕووتەختی پۆوتانەکان تاقیبکەوە.

ناوچە	خاڵ	$y \le -2x+4$	$y > x-4$
بۆلای چەپ	$(0,0)$	$0 \overset{?}{\le} -2(0)+4$ $0 \overset{?}{\le} 4$ ✓	$0 \overset{?}{>} 0-3$ $0 \overset{?}{>} -3$ ✓
بۆلای ڕاست	$(4,0)$	$0 \overset{?}{\le} -2(4)+4$ $0 \overset{?}{\le} -4$ ✗	$0 \overset{?}{>} 4-3$ $0 \overset{?}{>} 1$ ✗
بۆ سەرەوە	$(2,2)$	$2 \overset{?}{\le} -2(2)+4$ $2 \overset{?}{\le} 0$ ✗	$2 \overset{?}{>} 2-3$ $2 > -1$ ✓
بۆ خوارەوە	$(2,-2)$	$-2 \overset{?}{\le} -2(2)+4$ $-2 \overset{?}{\le} 0$ ✓	$-2 \overset{?}{>} 2-3$ $-2 \overset{?}{>} -1$ ✗

خاڵی یەکەم $(0,0)$ تەنها خاڵێکە سەربە ناوچەی شیکاری سیستمی دوو لاسەنگەکەیە.



$\begin{cases} y \geq \frac{3}{2}x+2 \\ x<3 \end{cases}$ (ب)

لە لاسەنگەی یەکەم وێنەی ڕاستەهێڵی $y=\frac{3}{2}x+2$ بەهێڵێکی نەپچڕاو بکێشە و ناوچەی سەرەوەی ڕەنگ بکە. و لە لاسەنگەی دووەمدا وێنەی ڕاستەهێڵی $x=3$ بە هێڵێکی خاڵ خاڵ بکێشە و ناوچەی لای چەپی سێبەراوی بکە. یەکتربڕینی دوو ناوچە ڕەنگکراوەکە دەبێتە ناوچەی شیکار بۆ سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان.

پاسادان: خاڵێك لە خاڵەکانی ناوچە هاوبەشەکە وەك $(-4\ ,0)$ تاقیبکەوە ئەگەر پۆوتانەکەی شیکاربێت بۆ سیستمەکە

$y \geq \frac{3}{2}x+2$ $x<3$

$0 \geq \frac{3}{2}(-4)+2$ $-4<3$ √

$0 \geq -4$ √

لەبەرئەوەی خاڵەکە سەر بە ناوچەی شیکارەکەیە، کەواتە ناوچەی یەکتر بڕینەکە دەبێتە ناوچەی شیکار.

هەوڵبدە بە ڕوونکردنەوەیی ئەم سیستمە دوو لاسەنگە هێڵییە شیکاربکە.

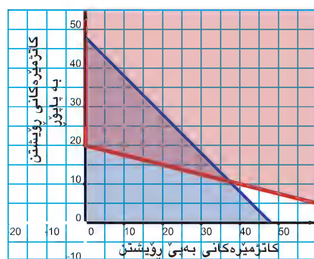
أ $\begin{cases} x-3y<6 \\ 2x+y>1.5 \end{cases}$ ب $\begin{cases} y \leq 4 \\ 2x+y<1 \end{cases}$

جێبەجێکردن لەسەر هەڵمەتەکانی دۆزینەوە

نموونە 2

هەڵمەتی دۆزینەوەی جەمسەرەکە لە دووری 240 km لە بنکەکەیەوە بوو. دەزگای کەشناسی ڕایگەیاند لەماوەی 48 کاتژمێر باهۆزی بەفر هەڵدەکات. دەستەی هەڵمەتەکە پێویستە بەخێرایی بە سواری پاپۆڕی سەهۆڵ ڕاماڵ بجولێن پاشان بەپێ بڕۆن بۆئەوەی بگەنە بنکەکەیان. ئەوپەڕی خێرایی پاپۆڕەکە 12 km/h بەڵام ئەوپەڕی خێرایی بەپێ ڕۆیشتن و ڕاکێشانی کەلوپەلەکانیان لە 3 km/h تێپەڕ ناکات. سیستمێکی لاسەنگە هێڵییەکان بنووسە و بە ڕوونکردنەوەیی شیکارییکە بۆ دیاری کردنی ماوەی سواربوونی پاپۆڕەکە و ڕۆیشتنیان بەپێ پێش گەیشتنیان بە بنکەکەیان.

شیکار



هێمای x بۆ ژمارەی کاتژمێرەکانی بەپێ ڕۆیشتن و y بۆ ژمارەی کاتژمێرەکانی سواربونی پاپۆڕەکە بەکاربهێنە بەمەرجێ سەرجەمی دوو نەزانراوەکە لە 48کاتژمێر زیاتر نەبێت، لاسەنگەیەکمان دەداتێ وەك $x+y \leq 48$ لەلایەکی ترەوە ئەو دوورییەی کە دەیبڕن نابێت لە 240 km زیاتربێت، لاسەنگەیەکمان دەداتێ وەك $3x+12y \geq 240$ سیستمی دوو لاسەنگە هێڵییەکە ئەمەیە: $\begin{cases} x+y \leq 48 \\ 3x+12y \geq 240 \end{cases}$

وێنەی ڕاستەهێڵی $3x+12y=240$ بە هێڵێکی نەپساو بکێشە و ناوچەی سەرووی ڕەنگ بکە دوایی وێنەی ڕاستەهێڵی $x+y=48$ بکێشە بە هێڵێکی نەپساو ناوچەی خوارەوەی ڕەنگ بکە. ناوچەی شیکار بریتییە لە ناوچەی یەکتربڕینی هەردوو ناوچە ڕەنگ کراوەکە.

ساغبکەوە خاڵی $(15,25)$ لە ناوچە یەکتربڕینەکە تاقیبکەوە و پۆوتانی ئەم خاڵە شیکاری هەریەك لە دوو لاسەنگەکە و سیستمەکە پێکدێنێت بەمەش.

$x+y \leq 48$ $3x+12y \geq 240$

$15+25 \leq 48$ $3(15)+12(25) \geq 240$

$40 \leq 48$ √ $345 \geq 240$ √

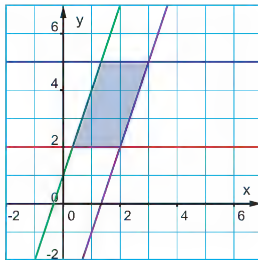
هەوڵبدە سۆلاف بابۆلەی گۆشت و بابۆلەی مریشك دەفرۆشێت. 40 کولێرەی پێیە واتا ناتوانێت لە 40 بابۆلە زیاتر لەهەردوو جۆرەکە پێکەوە بفرۆشێت. کە بابۆلەیەکی گۆشت 000 2 دینار قازانج دەکات، و بابۆلەیەکی مریشك 500 2 دینار قازانج دەکات، ئەو دەیەوێت 000 90 دینار قازانج بکات. سستەمی لاسەنگە هێڵییەکان بۆ نواندنی پرسیارەکە بنووسە، پاشان بە ڕوونکردنەوەیی شیکاری بکە.

دەگونجێت سستەمی لاسەنگە هێڵییەکان دوو لاسەنگەی زیاتر تێدابێت.

نموونە ③ **جێبەجێکردنی ئەندازەیی**

سیستمی ئەم لاسەنگە هێڵییانە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە و جۆری ناوچەی شیکارەکە دیاربکە.

$$\begin{cases} y \le 5 \\ y \ge 2 \\ y \le 3x+1 \\ y \ge 3x-4 \end{cases}$$



شیکار

بەهێڵی نەپساو وێنەی ڕاستەهێڵی $y=5$ و ڕاستەهێڵی $y=3x+1$ بکێشە و ئەو ناوچەیەی دەکەوێتە ژێر هەریەکەیان ڕەنگبکە.

بەهێڵی نەپساو وێنەی ڕاستەهێڵی $y=2$ ، ڕاستەهێڵی $y=3x-4$ بکێشە و ئەو ناوچەیەی دەکەوێتە سەرووی هەریەکەیان ڕەنگبکە، ناوچەی شیکاری سیستمەکە ناوچە یەکتربڕینەکەیە کە شێوەی چوارلایە. تێبینیبکە کە دوو ڕاستەهێڵی $y=5$ ، $y=2$ تەریبن دوو ڕاستەهێڵی ئاسۆیین و دەتوانین بڵێین هەمان لاریان هەیە (بەیەکتر تەریبن) و دوو ڕاستەهێڵی $y=3x+1$ ، $y=3x-4$ تەریبن چونکە هەمان لاریان هەیە.

ناوچەی شیکار چوارلایەکە لا بەرامبەرەکانی بەیەکتر تەریبن کەواتە لاتەریبە.

هەوڵبدە **بە ڕوونکردنەوەیی سیستمی ئەم لاسەنگە هێڵیانە شیکاربکە و جۆری ناوچەی شیکار دیاریبکە.**

أ $\begin{cases} x \le 6 \\ y \le \frac{1}{2}x+1 \\ y \ge -2x+4 \end{cases}$

ب $\begin{cases} y \le 4 \\ y \ge -1 \\ y \le -x+8 \\ y \le 2x+2 \end{cases}$

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. ڕونیبکەوە چۆن ناوچەی شیکار بۆ سستەمی لاسەنگە هێڵییەکان دیاریدەکەیت.
2. کەمترین ژمارەی لاسەنگەکان دەبێ چەندبێت تا ناوچەی شیکار سێگۆشە؟ چوارگۆشە؟ بێت نموونە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.
3. بەراوورد لەنێوان سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان و سستەمی هاوکێشە هێڵییەکاندا بکە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بەڕوونکردنەوەیی هەریەك لەم سیستەمە لاسەنگە هێڵییانە شیکاربکە.

4 $\begin{cases} y \geq 4x-4 \\ y \geq 3x-3 \end{cases}$

5 $\begin{cases} x+y>5 \\ x-y<-3 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 7x<y-16 \\ y \leq -5x-2 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x+2y \leq 4 \\ 3x-y>1 \end{cases}$

8 **کۆکردنەوەی پیتاك** یەکێك لە کۆمەڵەکانی خێرخوازی پیتاك کۆدەکاتەوە بە فرۆشتنی کراسی لۆکەیی. نرخی کراس بۆ گەوران 15 000 دینار و بۆ منداڵان 10 000 دینارە. ژمارەی کراسەکانی 250 کراسە لەهەردوو جۆر. کۆمەڵەکە پێی وابوو بەلایەنی کەم 3 ملیۆن دیناری دەست دەکەوێت. سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بۆ نواندنی بارەکە بنووسە، پاشان بە ڕونکردنەوەیی شیکاری بکە ژمارەی کراسەکان لەهەر جۆرێك کە پێویستە بفرۆشێت دیاریبکە.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

بە ڕوونکردنەوەیی هەریەك لەم سیستمە لاسەنگە هێڵییانە شیکاربکە و جۆری ناوچەی شیکارەکە دیاریبکە.

9 $\begin{cases} x \geq 9 \\ y \geq -18 \\ x \leq 13 \\ y \leq -4 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x \leq 7 \\ 2x-y \leq 3 \\ x+2y \geq -6 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x \leq -1 \\ y \leq 3x+2 \\ y \geq -3x-10 \end{cases}$

12 $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq x+6 \\ x \leq 6 \\ x \geq -2 \end{cases}$

بە ڕوونکردنەوەیی هەریەك لەم سستەمە لاسەنگە هێڵییانە شیکاربکە.

13 $\begin{cases} 5x-y>0 \\ y<x \end{cases}$

14 $\begin{cases} 3y \geq 2x-3 \\ y \geq 3x+8 \end{cases}$

15 $\begin{cases} x+y>5 \\ -2x+y \leq 2 \end{cases}$

16 $\begin{cases} y>4 \\ x+4y \geq 8 \end{cases}$

17 **مۆسیقا** کۆمپانیایەك دەیەوێت 10 000 CD بۆ کۆمەڵە گۆرانیەك بەرهەم بهێنێت. ژمارەیەك لەو CD یانەی تەرخان کرد بۆئەوەی بە خۆڕایی دابەشیان بکات بەسەر ئیستگەکانی ڕادیۆ و تەلەفزیۆن، ژمارەیەکی تر بۆ فرۆشتن، بەمەرجێ ژمارەی ئەو CD یانەی دەیبەخشێت لە ڕێژەی 20% لەکۆی گشتی تێپەڕنەکات. سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بنووسە کە ئەم بارە دەنوێنێت، لەگەڵ دیاریکردنی ژمارەی ئەو CD یانەی ئامادەکراوە بۆ فرۆشتن بۆ بەخشین بەخۆڕایی.

بە ڕوونکردنەوەیی هەریەکە لەم سیستمە لاسەنگە هێڵییانە شیکاربکە و جۆری ناوچەی شیکارەکە دیاربکە.

18 $\begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x+y \geq -4 \\ \frac{1}{3}x+y \leq -1 \end{cases}$

19 $\begin{cases} y \leq 2.5 \\ y \geq -0.5 \\ y \leq -x+8 \\ y \leq 2x+4 \end{cases}$

20 $\begin{cases} y \leq x+6 \\ y \geq x+1 \\ y \leq -x+6 \\ y \geq -x-1 \end{cases}$

21 $\begin{cases} y \leq x \\ y \leq -x+2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

ئەندازە سیستمی ئەو لاسەنگە هێڵییانە بنووسە کە شێوەکە ناوچە شیکارەکەیەتی:

22 لاکێشە

23 سێگۆشەی وەستاو

24 نیمچە لاتەریب

25 **باجی داهات** خشتەی بەرامبەر ڕێژەی باج لەسەر داهات بەپێی بەهای داهاتی خێزان نیشان دەدات. ڕێژەی باجی داهاتی سەرجۆن و ژنەکەی دەکاتە 25% . داهاتی ژنەکە بەلایەنی کەم 2 ملیۆن زیاترە لە داهاتی پیاوەکەی، سیستمێکی لاسەنگە هێڵییەکان بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت، پاشان سیستەمەکە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

ڕێژەی باجی دەرامەت بەپێی بەشەکان	
داهات (بەملیۆن دینار)	ڕێژەکە
لە 14 تا 56.800	15%
لە 56.801 تا 114.650	25%
لە 114.651 تا 174.700	28%

هەریەکە لەم سیستمە لاسەنگە هێڵییانە بەڕوونکردنەوەیی شیکاربکە، سێ خاڵ لە ناوچەی شیکارەکەدا دیاریبکە.

26 $\begin{cases} -5y < 2x \\ 5y \geq 2x - 20 \end{cases}$

27 $\begin{cases} y + 7 > 0 \\ y < 2x + 5 \\ y < -3x + 4 \end{cases}$

28 $\begin{cases} y \geq -8 \\ x + 2y < 4 \\ x > -6 \end{cases}$

29 $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y \leq 2 \\ x - y > 3 \end{cases}$

ڕوانین بۆ دواوە

دژ و هەڵگەڕاوەی هەریەك لەم ژمارانەی خوارەوە بدۆزەوە «دژە لێکدان و دژە کۆکردنەوە»

30 7 **31** $-\frac{3}{4}$ **32** 2.48 **33** -1

هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك لەم بارانەدا بدۆزەوە.

34 بە دووخاڵی $(2, -7)$ و $(1, 1)$ دا دەڕوات. **35** بەخاڵی $(3,-3)$ دەڕوات لارییەکەی سفرە.

36 بەخاڵی $(-2, 4.5)$ دا دەڕوات ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y = 4x - 1$.

37 بەخاڵی $(3, 2)$ دا دەڕوات تەریبە بە ڕاستەهێڵی $y = -x - 7$.

ڕوانین بۆ پێشەوە

38 ئایا نەزانراوی m بەهایەکی هەیە کەوا لە سیستمێکی لاسەنگە هێڵییەکانی $\begin{cases} y > -3x + 2 \\ y < mx - 3 \end{cases}$ بکات شیکاری نەبێت ئەگەر وەڵامەکەت بەڵێیە ئەو بەهایە چەندە؟ ئەگەر وەڵامەکەت نەخێرە هۆیەکەی ڕوونبکەوە.

ڕیزکراوەکان Matrices

بەشی

5



وانەکان

1. ڕیزکراوەکان
2. سنووردەرەکان

جیهانی تەکنەلۆجیا

دەتوانیت ڕیزکراوەکان بەکاربهێنیت بۆ نیشاندانی پێدراوەکان و شیکردنەوەی ئاراستەکانی پەرەسەندنیان بۆ نموونە: زیادبوونی ژمارەی ئەو هەرزەکارانەی تەلەفۆنی تایبەتیان هەیە (مۆبایل)

وانەی 1

ڕیزکراوەکان Matrices



بۆچی

ڕیزکراوەکان بەکاردێن بۆ ڕێکخستنی پێدراوەکان، هەروەکو ڕێکخستنی شتومەکەکانی دوکانێکی بازرگانی، وەك نموونە ١.

ئامانجەکان

- بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان بۆ نواندنی پێدراوەکانی بیرکاری وژیانی ڕۆژانە.
- کۆکردنەوەی ڕیزکراوەکان و لێدەرکردنیان.
- لێکدانی ڕیزکراوە لە ژمارەیەکی ڕاستی.

زاراوەکان
Vocabulary

ڕیزکراوە Matrix

پلەی ڕیزکراوە rank of matrix

دانەی ڕیزکراوە Entry

ناونیشانی دانەکە Address

ئەم خشتەیەی خوارەوە چالاکییەکانی بازرگانی یەکێ لە دوکانەکانی فرۆشتنی شتومەکی ناوماڵ بەدرێژایی مانگی نیسان پیشاندەدات. لەخشتەکەدا شتومەکەکانی دوکانەکە (دەرخستە لە یەکی نیساندا) و فرۆشراوەکان هەروەها کاڵا کڕاوەکان لە مانگی نیسان پیشاندەدات.

	شتومەکەکان لە یەکی نیسان		فرۆشراوەکان لە نیساندا		کڕاوەکان لە نیساندا	
	بچووك	گەورە	بچووك	گەورە	بچووك	گەورە
مێزەکانی باخچە	8	10	7	9	15	20
مقەڵی برژاندن	15	12	15	12	18	24

دەتوانیت پێدراوە شتومەکەکانی دوکانەکە بە بەکارهێنانی ڕیزکراوە بنوێنێت.

ڕیزکراوەی شتومەکەکان ⟵ (بچووك، گەورە) مێزەکانی باخچە، مقەڵی برژاندن

$$M = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

ڕیزکراوە Matrix خشتەیەکی لاکێشەییە لە چەندین خانە پێکدێت کە بەدوو کەوانەی ستوونی دەوردەراون. هەر خانەیەك لە ژمارەیەك پێکدێت پێدەوترێت **دانە** Element لەدانەکانی ڕیزکراوە.
پلەی ڕیزکراوە rank of matrix بر یتییە لە ژمارەی ڕیزو ستوونەکانی، کە بەم جۆرە دەنووسرێت ژمارەی ستوونەکانی columns ، ژمارەی ڕیزەکانی rows بۆیە بەشێوەی ژمارەی ستوون × ژمارەی ڕیزی دەنووسرێت. بۆیە ئەگەر ڕیزکراوەیەك دوو ڕیز وسێ ستوونی هەبێت، جۆرەکەی 3 × 2 دەبێت (بە 2 جاران 3 دەخوێندرێتەوە). کەواتە جۆری ڕیزکراوەی شتومەکەکان لەسەرەوە 2 × 2 دەبێت، بۆ هەر دانەیەك لەدانەکانی **ڕیزکراوە ناونیشان** Address هەیە کە شوێنەکەی لە ڕیزکراوەکە دیاریدەکات. ناونیشانی دانە لە ژمارەی ئەو ڕیزەی کە لەسەریەتی بەدوای دا ژمارەی ئەو ستوونەی کە لە خۆی دەگرێت پێکدێت. بۆیە دانەی 10 لە ڕیزکراوەکەی سەرەوەدا ئەو دانەیەیە کە لە ڕیزی 1 و ستوونی 2 دایە. ئەم دانەیە بە هێمای m_{12} هێمادەکرێت.

نموونە 1

بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان بۆ پیشاندانی پێدراوەکان

پێدراوەکانی فرۆشراوەکان لە مانگی نیساندا بەکاربهێنە.

أ ڕیزکراوە بەکاربهێنە بۆ پیشاندانی پێدراوەکان.

ڕیزکراوەی فرۆشراوەکان ⟵ (بچووك، گەورە) مێزەکانی باخچە، مقەڵی برژاندن

$$S = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$$

ب پلەی ڕیزکراوەی S چەندە؟

ڕیزکراوەی S دوو ڕیز و دووستوونی هەیە. کەواتە پلەکەی 2 × 2 .

ج دانەی s_{12} کامەیە؟

دانەی s_{12} دەکەوێتە سەر یەکتربڕینی ڕیزی یەکەم وستوونی دووەم، کە بریتییەلە 9 . ئەم دانەیە وادەگەیەنێت کە دوکانەکە 9 مێزی گەورەی لە مانگی نیساندا فرۆشتووە

د ناونیشانی 15 چییە؟

دانەی 15 دەکەوێتە سەر یەکتربڕینی ڕیزی دووەم لەگەڵ ستوونی یەکەم، کە بریتییە لە دانەی S_{21}.

هەوڵبدە ڕیزکراوەی بەرامبەر بۆ وەڵامدانەوە بەکاربهێنە.

$$M=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5 & 0\\ 1 & 5 & 0 & 9\\ 12 & 11 & 4 & 12\end{bmatrix}$$

أ ڕیزکراوەی m لە چ جۆرێکە؟

ب دانەی m_{32} چەندە؟

ج سفر لە دوو شوێندا دەردەکەوێ، ناونیشانیان چییە؟

دوو ڕیزکراوە یەکسان دەبن ئەگەر لە هەمان جۆربن ودانە بەرامبەرەکانیان لەهەردوو ڕیزکراوە یەکسان بن(واتا ئەو دانانەی کەهەمان ناونیشانیان هەیە لەهەردوو ڕیزکراوەکەدا).

نموونە 2 **یەکسانبوونی ڕیزکراوەکان**

بەهای هەریەکە لە x و y دیاریبکە، کاتێك هەردوو ڕیزکراوەکە یەکسان بن.

$$\begin{bmatrix}2x+4 & 5 & 1\\ -2 & -3y+5 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 5 & 1\\ -2 & 5y-3 & -4\end{bmatrix}$$

لەبەر ئەوەی دوو ڕیزکراوەکە یەکسانن، کەواتە $2x+4=12$ و $-3y+5=5y-3$

$2x=8$ و $-8y=-8$

$x=4$ و $y=1$

هەوڵبدە بەهای هەریەکە لە x و y دیاریبکە، کاتێك هەردوو ڕیزکراوەکە یەکسان بن.

$$\begin{bmatrix}-3 & -2x & -3\\ -2 & 3y & -12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -15 & -3\\ -2 & -2y+15 & -12\end{bmatrix}$$

کۆکردنەوە ولێدەرکردنی ڕیزکراوەکان Adding and Subtracting matrices

بەنووسین	بەژمارەیی	بەجەبری
بۆ ئەوەی دوو ڕیزکراوە کۆبکەیتەوە یان لێکیان دەربکەیت، دانە بەرامبەرەکان کۆبکەوە یان لێکدەربکە.	$[1\ \ 2]+[5\ \ 10]=[6\ \ 12]$	$[a_{11}\ \ a_{12}]+[b_{11}\ \ b_{12}]=[a_{11}+b_{11}\ \ a_{12}+b_{12}]$

بۆ ئەوەی دوو ڕیزکراوە کۆبکەیتەوە یان لێکدەربکەی، پێویستە دوو ڕیزکراوەکە لەهەمان جۆر بن.

کۆکردنەوەکە دەکرێت. دوو ڕیزکراوەکە لەهەمان جۆرن.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 6 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 7 & 6\end{bmatrix} ،\ \begin{bmatrix}5\\6\\7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\8\\1\end{bmatrix}$$

کۆکردنەوەکە ناکرێت.چونکە دوو ڕیزکراوەکە لە دوو جۆری جیاوازن.

$$[1\ \ 2]+\begin{bmatrix}5\\10\end{bmatrix} ،\ [a_{11}\ \ a_{12}]+[b_{14}\ \ b_{12}\ \ b_{13}]$$

نموونه ③ **کۆکردنەوە و لێدەرکردنی ڕیزکراوەکان**

ئەم ڕیزکراوانەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکان.

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\\ 2 & 6\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\\ -5 & 14\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 3 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

کۆیان بکەوە یان لێکیان دەربکە ئەگەر توانرا.

أ $A+C$

هەر دانەیەکی ڕیزکراوەی یەکەم لەگەڵ دانەی بەرامبەری لە ڕیزکراوەی دووەم کۆبکەوە.

$$A+C=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\\ 2 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\\ -5 & 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+3 & -2+2\\ -3+0 & 10+(-9)\\ 2+(-5) & 6+14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0\\ -3 & 1\\ -3 & 20\end{bmatrix}$$

ب $C-A$

$$C-A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\\ -5 & 14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\\ 2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-4 & 2-(-2)\\ 0-(-3) & (-9)-10\\ -5-2 & 14-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 3 & -19\\ -7 & 8\end{bmatrix}$$

ج $C+B$

لەبەر ئەوەی جۆری ڕیزکراوەی C (3×2) جیاوازە لە جۆری ڕیزکراوەی B (2×3) بۆیە کرداری کۆکردنەوەکە ناتوانرێت ئەنجام بدرێت.

هەوڵبدە کۆ بکەوە یان لێ دەربکە ئەگەر توانرا.

أ $B+D$ **ب** $B-A$ **ج** $D-B$

دەزانیت لێکدان کۆکردنەوەیەکی دووبارەیە. ئەمە کاتێك ڕاستە کە ڕیزکراوەکە لە ژمارەیەك بدەیت.

ئەگەر $M=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ دەتوانیت $M+M$ بە شێوەی $2M$ بنووسیت.

دەتوانیت ژمارەیەك لە ڕیزکراوەیەك بدەیت. ئەویش بە لێکدانی هەموو دانەیەك لە دانەکانی ڕیزکراوەکە لەو ژمارەیە.

$$2\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times 2 & 2\times 0\\ 2\times 1 & 2\times 5\end{bmatrix}$$

نموونه ④ **جێبەجێکردن لە بازرگانیدا.**

بەگەڕانەوە بۆ چالاکی بازرگانی دوکانەکەی فرۆشتنی کەلوپەلی ناوماڵ، ڕیزکراوەی $M-S+D$ هەژماربکە. کاتێك M ڕیزکراوەی شتومەکەکانی ناو دوکانەکەیە و S ڕیزکراوەی فرۆشتنەکانە و D ڕیزکراوەی کڕینەکان بێت. ڕیزکراوەی ئەنجامەکە چی دەنوێنێت؟

$$M-S+D=\begin{bmatrix}8 & 10\\ 15 & 12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7 & 9\\ 15 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15 & 20\\ 18 & 24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8-7+15 & 10-9+20\\ 15-15+18 & 12-12+24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 21\\ 18 & 24\end{bmatrix}$$

بچووك گەورە

$$=\begin{bmatrix}16 & 21\\ 18 & 24\end{bmatrix}$$ مێزی باخچە / مقەڵی برژاندن

ڕیزکراوەی ئەنجامەکە شتومەکەکانی ناو دوکانەکە دەنوێنێت لە کۆتایی مانگی نیساندا. لە دوکانەکە 16 مێزی باخچەی بچووك و 21 مێزی گەورە و 18 مقەڵی بچووك و 24 مقەڵی گەورەی تێدابوو.

هەوڵبدە ڕیزکراوەی $A+2B-3C$ هەژماربکە، کاتێك

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 2\end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\-2 & 5\end{bmatrix} \text{ و } C=\begin{bmatrix}0 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}$$

نموونە 5 **نووسینی برە ڕیزکراوەییەکان بەسادەترین شێوە.**

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربهێنە بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکان.

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2\\-3 & 10\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\3 & 2 & 8\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}3 & 2\\0 & -9\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}-6 & 3 & 8\end{bmatrix}$$

بە سادەترین شێوە ئەمانە بنووسە.

أ $2A-3B$ ئەگەر لەتوانا دابوو.

$$2A-3B=2\begin{bmatrix}4 & -2\\-3 & 10\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\3 & 2 & 8\end{bmatrix}$$

لەبەر ئەوەی لێکدانی ڕیزکراوە لە ژمارەیەکی نەگۆڕ جۆرەکەی ناگۆڕێ، بۆیە جۆری ڕیزکراوەکانی$2A$و$3B$ یەکسان نابن. ئەمەش وادەکات لێکدەرکردنیان لەتواناڵدا نەبێت.

ب $C-2A$

$$C-2A=\begin{bmatrix}3 & 2\\0 & -9\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}4 & -2\\-3 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\0 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(-2)\times 4 & (-2)\times(-2)\\(-2)\times(-3) & (-2)\times 10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 2\\0 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8 & 4\\6 & -20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 6\\6 & -29\end{bmatrix}$$

هەوڵبدە **بە سادەترین شێوە بنووسە ئەگەر لەتواناڵدابوو.**

أ $2B+3C$ **ب** $4A-3C$ **ج** $D+0.5D$

سیفەتەکانی کۆکردنەوەو لێدەرکردنی ڕیزکراوەکان propertio of addiy and suttractiy Matrices

بەنووسین	بەژمارەیی	بەجەبری
سیفەتی ئالوگۆڕ کۆکردنەوەی ڕیزکراوەکان کردارێکی ئالوگۆڕە.	$\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 7\\3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 7\\3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}$	$A+B=B+A$
سیفەتی یەکتر بەستن کۆکردنەوەی ڕیزکراوەکان کردارێکی یەکتربەستنە.	$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$	$A+B+C$ $(A+B)+C=$ $A+(B+C)$
ڕیزکراوەی بێ لایەن لە کۆکردنەوەدا کۆمەڵەی سفری دانەی بێ لایەنە لە کۆکردنەوەی ڕیزکراوەکاندا.	$\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}$	$A+0=A$
دژە کۆکردنەوەی ڕیزکراوە دژە کۆکردنەوەی ڕیزکراوەی M بریتییە لەو ڕیزکراوەیەی کە پەیدا دەبێت لە ئەنجامی گۆڕینی هەر دانەیەك لە دانەکانی M بە دژەکوکردنەوەکەی.	$\begin{bmatrix}-2 & 5\\9 & -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -5\\-9 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$	ئەگەر B دژەکۆکردنەوەی A بێت، ئەوا $A+B=0$ کاتێك 0 ڕیزکراوەی سفریە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 هەموو پلەکانی ڕیزکراوەیەك بدۆزەوە لە 8 دانەپێکهاتبێت.ڕوونیبکەوە چۆن دۆزیتەوە.

2 باسی کردارێك بکەلەسەر ڕیزکراوەکان کە دەبێتە هۆی دژبوونی نیشانەی هەردانەیەکی.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

3 **زاراوەکان** ئەو بەهایەی کە دەکەوێتە سەر یەکتربڕینی ڕیزێك وستوونێك لە ڕیزکراوەیەکدا (دانەیە یان ناونیشانی دانە) پێکدەهێنێت.

4 هۆشیار وشێرکۆ ودڵسۆز کاری فرۆشتنی پلیتەکانی ئاهەنگی کۆتایی ساڵیان گرتە ئەستۆ. ئەم خشتەیەی خوارەوە ئەو پێدراوانە دەنوێنن کە پەیوەندییان بە فرۆشتنی پلیتەکانەوە هەیە.

فرۆشتنی پلیتەکانی ئاهەنگی کۆتایی ساڵی خوێندن			
خوێندکار	پلیتە تاکەکان	دەفتەرە پلیتەکان	بڕی پارەی گشتی بەدینار
هۆشیار	39	15	114 000
شێرکۆ	108	8	143 000
دڵسۆز	13	25	138 000

أ ڕیزکراوەی A بۆ پیشاندانی پێدراوەکانی خشتەکە بەکاربهێنە.

ب پلەی ڕیزکراوەی A چییە؟

ج دانەی a_{13} چەندە؟ چی دەنوێنێت؟

د ناونیشانی دانەی 143 000 چییە؟

5 بەهاکانی x و y دیاریبکە کاتێك دوو ڕیزکراوەکە یەکسان بن.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 14-x \\ -13-y & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & x+8 \\ 2y-1 & 0 \end{bmatrix}$$

ئەم ڕیزکراوانەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانەکانی 6 تا 9 . کۆیان بکەوە یان لێکیان دەربکە کاتێك لە تواناد بێت.

$$A=\begin{bmatrix} 1.5 & 3.8 & 3 \\ -1.2 & 2.4 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} -1 & 1.1 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2.3 & 1 \end{bmatrix}$$

6 $A+B$

7 $B-C$

8 $B-A$

9 $B+A$

10 **بەکاربردن** خشتەی بەرامبەر نرخەکانی سێ جۆر لە پۆشاکی وەرزشی دیاریدەکات پێش دانانی باج لەسەریان ئەم نرخانە بە ڕیزکراوەی M بنوێنە، پاشان ڕیزکراوەی T بدۆزەوە کە بەهای باجی هەر جۆرێکیان بنوێنێت، ئەگەر بزانیت ڕێژەی سەدی باج 8.25% .ڕیزکراوەی A بنووسە کە نرخی هەر سێ جۆر پۆشاکەکە بنوێنێت دوای زیادکردنی باج لەسەریان.

	نرخەکانی پۆشاکە وەرزشییەکان		
	سادە	ئارمی لەسەر بێت	ناياب
کراسی لۆکە	9 000	13 000	14 000
شۆرتی کورت	6 000	9 500	11 000
شۆرتی درێژ	15 000	21 000	23 000

ئەم ڕیزکراوانەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانەکانی 11 تا 14 . ئەنجامەکە بە سادەترین شێوە بنووسە، ئەگەر توانرا.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 6\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

11 $3B$ **12** $\frac{1}{2}C$ **13** $A-2B$ **14** $2C-A$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

15 پێدراوەکانی ئەم خشتەیە بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکان بەکاربهێنە.

نمرە	پلیت	ئوتێل	ئوتۆمبیل
	نرخەکانی پۆشاکە وەرزشییەکان		
یەکەم	425 500	396 000	65 990
کارەکان	385 980	245 500	45 900
ئابووریانە	275 120	103 250	29 500

أ ڕیزکراوەی A بۆ پیشاندانی پێدراوەکانی خشتەکە بەکاربهێنە.

ب پلەی ڕیزکراوەی A چییە؟

ج دانەی a_{32} کامەیە؟ چی دەنوێنێت؟

د ناونیشانی دانەی 385980 چییە؟

16 بەهای x و y دیاریبکە کاتێك دوو ڕیزکراوەکە یەکسان بن.

$$\begin{bmatrix}2x & y+1 & -2y\end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix}3x-2y & 14 & -x\end{bmatrix}$$

ئەم ڕیزکراوانەی دێن بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانەکانی 17 تا 20 . کۆبکەوە یان لێدەربکە، کاتێك لە تواناداییێت.

$$D=\begin{bmatrix}5.1 & 2.5\\ -2 & 0\\ 0 & 1.5\end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix}3.2 & -1\\ -1.5 & 2.4\end{bmatrix}\quad F=\begin{bmatrix}-4.2 & -1\\ 2.2 & 0\end{bmatrix}$$

17 $F-E$ **18** $D+E$ **19** $D+F$ **20** $E+F$

21 **خوێندنی زانکۆ** ئەم خشتەیەی خوارەوە تێچوونی ساڵانەی خوێندنی زانکۆ دەردەخات.

بەهای خەملێنراوی تێچوونی ساڵانەی خوێندنی زانکۆ			
	زانکۆی تایبەت	زانکۆی فەرمی نیشتمانی	زانکۆی فەرمی بیانی
تێچوون بە دینار	27 677 000	12 841 000	19 188 000

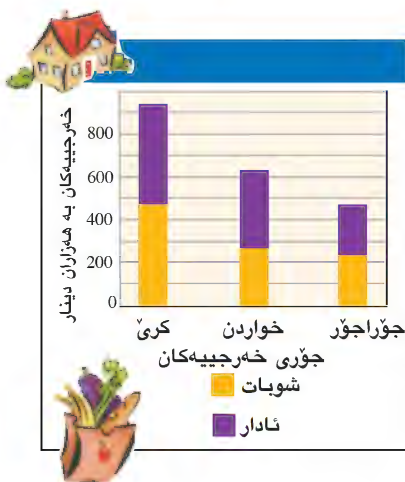
شارەزایان وا پێشبینی دەکەن کە ساڵی داهاتوو ئەو تێچوونانە بە ڕێژەی 5% زیادبکەن.
بەبەکارهێنانی لێکدانی ژمارەیەك لە ڕیزکراوە بەهای خەملێنراوی تێچوونی خوێندن
لەهەر سێ جۆری زانکۆکە لە ساڵی داهاتوو بدۆزەوە.

ئەم ڕیزکراوانەی دێن بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 22 تا 25 . ئەنجامەکە بەسادەترین شێوە بنووسە، ئەگەر توانرا.

$$G=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -2\end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\\ 5 & 0\end{bmatrix}$$

22 $2G$ **23** $\frac{1}{2}(H+J)$ **24** $2K-G$ **25** $H-0.3G$

26 **خەملاندن** ئەو وێنە ڕوونکردنەوەیەی بەرامبەر ئەو ئەنجامانە دەنوێنێت کە کلارا بە بەکارهێنانی کۆمپیوتەر دەستی کەوتوون، پاش ئەوەی خەرجییەکانی شوبات و ئاداری تیادا تۆمارکرد. ڕیزکراوەی $F(3\times1)$ بەکاربهێنە بۆ نواندنی خەرجییەکانی لە مانگی شوبات و ڕیزکراوەی M بۆ نواندنی خەرجییەکانی لە مانگی ئاداردا. ڕیزکراوەکان کۆبکەوە بۆ دەستکەوتنی خەرجی گشتی لەهەردوو مانگەکەدا.



27 **ئەندازە** ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}2 & 2.5\\ 3 & 3.5\end{bmatrix}$ نیوەتیرەکانی چوار بازنە دەنوێنێت.
ڕیزکراوەیەك بنووسە کە چێوەکانی ئەو بازنانە بنوێنێت.

بیری ڕەخنەگر ڕوونیبکەوە ئەم دەستەواژانە هەمیشە دروستن، یان هەندێ جار دروستن یان هەمیشە نادروستن.

28 دەتوانرێت دوو ڕیزکراوە کۆبکرێنەوە کە هەمان ژماری دانەیان هەبێت.

29 دەتوانرێت دوو ڕیزکراوەکە کۆبکرێنەوە ئەگەر ژمارەی دانەکانیان جیاواز بێت.

30 دەتوانرێت دوو ڕیزکراوە کۆبکرێنەوە هەریەکەیان 3 ڕیز و 4 ستوونیان هەبێ.

31 ئەگەر توانرا دوو ڕیزکراوە کۆبکرێنەوە، ئەوا لێدەرکردنیشیان لە توانادایە.

32 بەهاکانی x و y و z دیاریبکە بە جۆرێك یەکسانبوونی ڕیزکراوەکە ڕاست دەرچێت.

$$\begin{bmatrix}3 & x\\ -2 & -8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}11 & -4\\ y & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -10\\ 9 & z\end{bmatrix}$$

33 **هەڵە لە شیکردنەوە** هەڵەکە ڕوونبکەوە:

$$\begin{bmatrix}2 & 8\\ 4 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 11 & 0\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

34 **بنووسە** ئایا لێدەرکردنی ڕیزکراوەکان کردارێکی ئاڵوگۆڕە؟ نموونەیە بێنەوە و ڕاستی وەڵامەکەت بسەلمێنی.

35 $B=\begin{bmatrix}1 & 0.1 & 2\\1.5 & 2.1 & 0\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}2 & 0.4 & 6\\6 & 6.4 & 0\end{bmatrix}$ کام بڕ دەکاتە ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ ؟

(أ) $2C-\frac{1}{2}B$ (ب) $C-2B$ (ج) $B-2C$ (د) $2B-\frac{1}{2}C$

36 کام دەستەواژە هەمیشە ڕاستە بۆ ڕیزکراوەی E لە جۆری $m\times n$ ؟

(أ) ژمارەی دانەکانی $m\times n$ (ب) دانەی e_{nm} ی هەیە.

(ج) ژمارەی دانەکانی $m+n$ (د) m ستوون و n ڕیزی هەیە.

37 بەهای x کەپاسادانی $8\begin{bmatrix}12 & 8\\2 & 7\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}48 & 32\\8 & 28\end{bmatrix}$ دەکاتە چەند؟

(أ) 0.25 (ب) 0.5 (ج) 2 (د) 4

38 **وەڵامی کورت** بەهای x بدۆزەوە کە پاسادانی $\begin{bmatrix}1- & 8-\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x- & 5\end{bmatrix}2-\begin{bmatrix}2- & 2\end{bmatrix}$ دەکات.

ڕوانین بۆ دواوە

39 **دراوەکان** شیلان 36 پارچە دراوی لە جۆری هەزار دیناری و 500 دیناری پێیە بەهای. ئەو گوژمەیە چەندە، ئەگەر بزانیت ژمارەی پارچەکانی جۆری 500 دینار دوو ئەوەندەی ژمارەی هەزار دیناریەکانە؟

دیاریبکە ئەگەر خاڵی دراو شیکارە بۆ سستەمی دوو هاوکێشەکە. (پۆلەکانی پێشوو).

40 $(2, -2)$ ؛ $\begin{cases}x-y=4\\5x+6y=2\end{cases}$

41 $(4.5, 2)$ ؛ $\begin{cases}y=2\\2x-4y=1\end{cases}$

ڕوانین بۆ پێشەوە

42 ڕیزکراوەی B بدۆزەوە بە جۆرێك یەکسانبوونەکە ڕاست دەرچێت.

$$3\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & -4\end{bmatrix}-2B=\begin{bmatrix}1 & 5\\-2 & 2\end{bmatrix}$$

وانەی 2

سنووردەرەکان و ڕێسای کرامر

Determinants and Cramer's Rule



بۆچی

شارەزایانی بواری خۆراکی وەرزشکاران پێویستیان بە شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵییەکانە بۆ دیاریکردنی ئەو برە گەرمۆکیانە و پرۆتین وچەوری وکاربۆهیدراتەی کە وەرزشوانێك پێویستیەتی لە خۆراکەکەیدا. (نموونە 4).

ئامانجەکان

- سنووردەری ڕیزکراوەی 2×2 یان 3×3 هەژماردەکات.
- شیکارکردنی سستەمێکی هێڵی بە بەکارهێنانی ڕێسای کرامەر.

زانایانی بیرکاری ڕیزکراوە چوارگۆشەییەکان وژمارەکان جووت دەکەن، بە جۆرێك بەرامبەر هەر ڕیزکراوەیەکی چوار گۆشەیی ژمارەیەکی ڕاستی هەیە پێی دەوترێت **سنووردەری ڕیزکراوە** Determinant هێمای $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ بەکاردێت بۆ نواندنی سنووردەری ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. سنووردەری ڕیزکراوە ڕۆڵێکی گرنگی هەیە هەروەکو لە دواییدا دەیبینیت.

زاراوەکان

Vocabulary

سنووردەر Determinant

ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان

Cofficient matrix

ڕێسای کرامەر

Cramer's Rule

سنووردەری ڕیزکراوەی 2×2 . Delerminant 2×2

بەزارەکی	بەژمارەیی	بەجەبری
سنووردەری Determinant ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بریتییە لە $ad - bc$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (3)(2) = -2$	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

نموونە 1 دۆزینەوەی سنووردەری ڕیزکراوەی 2×2

سنووردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

أ $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3 - 5 \times 8$$

$$= 18 - 40 = -22$$

ئەنجامی لێکدانی دوو نێوانکە لە ئەنجامی لێکدانی دوولاکە دەربکە.

سنووردەری ڕیزکراوەکە بریتییە لە -22

ب $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times 3 - \frac{2}{3}(-6) = 1 + 4 = 5$$

هەوڵبدە سنووردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

أ $\begin{bmatrix} 0.2 & 30 \\ -0.3 & 5 \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{5}{6} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 4 & 2\pi \end{bmatrix}$

دەتوانیت سنووردەرەکان بەکاربهێنیت بۆ شیکارکردنی سیستەمی هاوکێشە هێڵییەکان.

بۆ شیکاری $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ دەستبکە بە نووسینی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ کە پێی دەوترێت

ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان Coefficient matrix . و سنووردەرەکەی D هەژماربکە،

پاشان دوو سنووردەری $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ و $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

هەژماربکە پاشان ڕێسای کرامەر بەکاربهێنە.

ڕێسای کرامەر بۆ سیستەمی 2 × 2 — Cramers Rule

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

ئەگەر سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان D نەکاتە سفر، ئەوا سستەمی تەنها شیکارێکی هەیە ئەویش $x=\frac{D_x}{D}$ وە $y=\frac{D_y}{D}$ ، کاتێك

$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ، $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

دەتوانیت سنووردەرەکانی D و D_x و D_y بەکاربهێنیت بۆ ئەوەی بزانیت کە سستەمەکە دیاریکراوە (شیکارێکی تاکانەی هەیە، یان ئەستەمە (شیکار نییە) یان دیارینەکراوە (ژمارەیەکی دیارینەکراو لە شیکاری هەیە)، لەم پۆلێنکردنەی خوارەوەدا وا دادەنێین کە a_1 و b_1 سفرنین لە هەمان کاتدا، و a_2 و b_2 سفرنین لەهەمان کاتدا.

پۆلێنکردنی سیستەمی دوو هاوکێشەی هێڵی بە دوو نەزانراو

ئەگەر $D \neq 0$ سستەمەکە دیاریکراوە.	ئەگەر $D=0$ وە $D_x=D_y=0$ سستەمەکە دیارینکراوە.	ئەگەر $D=0$ وە $D_x \neq 0$ یان $D_y \neq 0$ سستەمەکە ئەستەمە.

نموونە 2 شیکارکردنی سیستەمە هێڵییەکانی 2 × 2 بە بەکارهێنانی ڕێسای کرامەر

ئەم سیستەمە هێڵییە بە بەکارهێنانی ڕێسای کرامەر شیکار بکە.

أ $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$

هەنگاوی 1 :سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بدۆزەوە.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1(-1)-2(-1)=1$$

سیستەمەکە دیاریکراوە چونکە $D \neq 0$

هەنگاوی 2 : هەردوو سنووردەری D_x و D_y بدۆزەوە.

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \quad ، \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

هەنگاوی 3 : بەهای x و y بدۆزەوە.

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-7}{1} = -7 \quad ؛ \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{-4}{1} = -4$$

سیستمەکە شیکارێکی تاکانەی هەیە ئەویش $(-4, -7)$

ب $\begin{cases} y - 2 = 3x \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

هەنگاوی 1 : سیستمەکە بە شێوەی گشتی بنووسە.

$$\begin{cases} 3x - y = -2 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

هەنگاوی 2 :سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بدۆزەوە.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 3(-1) = 0$$

هەنگاوی 3 :هەژمارەی D_x بکە.

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

لەبەر ئەوەی $D = 0$ و $D_x \neq 0$ کەواتە سیستمەکە ئەستەمە.

هەوڵبدە سیستمەکە شیکار بکە بە بەکارهێنانی ڕێسای کرامەر $\begin{cases} 6x - 2y = 14 \\ 3x = y + 7 \end{cases}$

بۆ ئەوەی ڕێسای کرامەر بۆ شیکارکردنی سستەمی هێڵی 3 × 3 بەکاربهێنی، پێویستە هەژمارەی سنووردەری ڕیزکراوەکانی جۆری 3 × 3 بکەیت. ئەم هێڵکارییەی خوارەوە یەکێ لە ڕێگاکانە بۆ ئەنجامدانی کردارەکە.

دوو ستوونی یەکەم لە لای ڕاستی سنووردەرەکە بنووسەوە.

ئەنجامی لێکدانی ژمارەکانی تیرە سوورەکان کۆبکەوە، پاشان ئەنجامی لێکدانی ژمارەکانی تیرە شینەکانی لێدەربکە.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \quad a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$$

نموونە 3 هەژمارکردنی سنووردەری ڕیزکراوەی 3 × 3 .

هەژمارەی سنووردەری ڕیزکراوەی $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ بکە.

سنووردەرەکە بنووسە، پاشان دوو ستوونی یەکەمی لە لای ڕاستی سنووردەرەرەکە بنووسە.

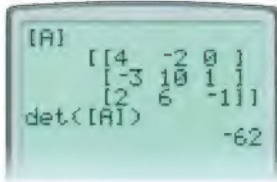
$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{matrix}$$

هەنگاوی 1 : هەژمارەی ئەنجامی لێکدانی ژمارەکانی هەر تیرەیەکی بەروخوار بکە وئەنجامەکان کۆبکەوە.

$(4)(10)(-1)+(-2)(1)(2)+(0)(-3)(6)=-44$

هەنگاوی 2 : هەژمارەی ئەنجامی لێکدانی ژمارەکانی هەر تیرەیەکی بەروژووربکە وئەنجامەکان کۆبکەوە.



$(2)(10)(0)+(6)(1)(4)+(-1)(-3)(-2)=18$

هەنگاوی 3 : سەرجەمی دووەم لەسەرجەمی یەکەم دەربکە $-44-18=-62$.

سنووردەری ڕیزکراوەی A دەکاتە -62 .

پاسادان بکە بژمێری ڕوونکردنەوەی بەکاربهێنە. ئەگەر توانرا.

هەوڵبدە سنووردەری ڕیزکراوەی $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ 10 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ بدۆزەوە.

دەتوانرێت ڕێسای کرامر فراوانتر بکرێت بۆ ئەوەی سیستەمی هێڵی 3×3 بگرێتەوە.

ڕێسای کرامەر بۆ سیستەمی 3×3 — Cramers Rule 3 × 3

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

ئەگەر سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان نەکاتە سفر، ئەوا سیستمی شیکارێکی تاکانەی هەیە، بریتییە لە $x=\frac{D_x}{D}$ ، $y=\frac{D_y}{D}$ ، $z=\frac{D_z}{D}$

کاتێک
$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

ئەگەر $D \neq 0$ ، ئەوا سیستەمەکە شیکارێکی تاکانەی هەیە.

ئەگەر $D=0$ و $(D_x \neq 0$ یان $D_y \neq 0$ یان $D_z \neq 0)$ ئەوا سیستەمەکە ئەستەمە.

ئەگەر $D=0$ و $(D_z = D_y = D_x = 0)$ ئەوا سیستەمەکە دیارینەکراوە.

نموونە 4 جێبەجێکردنی خۆراکی

یەکێک لە شارەزایانی خۆراک کار لەسەر دارشتنی سیستەمی خۆراکی یاریزانانی تۆپی پێ دەکات. لە سیستەمەکەدا وا پێویست دەکات یاریزان 3600 گەرمۆکەی گەرمی و 750g خۆراک ڕۆژانە بەکاربهێنن. پێویستە ئەو گەرمۆکە گەرمیانەی کە سەرچاوەکەیان پرۆتین وچەورییە 60% ی کۆی گەرمۆکە گەرمییەکان پێکبهێنن. چەند گرام لە پرۆتین وکاربۆهێدرات وچەوری پێویستە بۆ ئەم سیستەمە.

ئەم سیستەمە خۆراکیە پێکهاتووە لە p گرام لە پرۆتین و c گرام لە کاربۆهێدرات و f گرام لە چەوری.

گەرمۆکە گەرمییەکان لەهەر گرامێکدا	
خۆراک	گەرمۆکەکان
پرۆتین	4
کاربۆهێدرات	4
چەوری	9

$$4p+4c+9f=3600$$
$$p+c+f=750$$
$$4p+0c+9f=2160$$ گەرمۆکەکانی پرۆتین وچەوری دەکاتە $60\%(3600)=2160$

$$Df=\begin{vmatrix}4&4&3600\\1&1&750\\4&0&2160\end{vmatrix}\text{، }Dc=\begin{vmatrix}4&3600&9\\1&750&1\\4&2160&9\end{vmatrix}\text{، }Dp=\begin{vmatrix}3600&4&9\\750&1&1\\2160&0&9\end{vmatrix}\text{، }D=\begin{vmatrix}4&4&9\\1&1&1\\4&0&9\end{vmatrix}=-20$$

$$f=\frac{D_f}{D}=\frac{-2400}{-20}=120\text{ ، }c=\frac{Dc}{D}\frac{-7200}{-20}=360\text{ ، }p=\frac{D_p}{D}=\frac{-5400}{-20}=270$$

ئەم سستەمە پێکدێت لە 270g پرۆتین و 360g كاربۆهیدرات و 120g چەوری.

هەوڵبدە چی دەبێت ئەگەر....؟ سیستەمەکە ڕۆژانە پێویستی بە بەکاربردنی 3200 گەرمۆکەی گەرمی و 700g خۆراك بکات، پێویستە ئەو گەرمۆکە گەرمیانەی سەرچاوەکەیان کاربۆهێدراتە 70% کۆیگەرمۆکە گەرمییەکان بن. ئایا چەند گرام لە پرۆتین وکاربۆهیدرات وچەوری لە سستەمەکەدا پێویست دەبێت؟

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1. باسی ڕیزکراوەیەك بکە سنووردەری نەبێت.

2. کاتێك ڕێسای کرامەر بەسەر سیستمێکی هێڵی دوو هاوکێشەی دوو نەزانراو جێبەجێ دەکەین، ئایا سێ سنووردەرەکە چۆن دەبن کاتێك یەکێك لە هاوکێشەکان لە ئەنجامی لێکدانی ژمارەیەك لە هاوکێشەی دووەم پێکهاتبێت؟

3. **زاراوەکان** مانای چی دەگەیەنێت، ئەگەر یەکێك لە دانەکانی ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان سفر بێت؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

سنووردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

4. $\begin{bmatrix}7&5\\9&2\end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix}1.5&0.25\\6&2.5\end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\\\frac{3}{4}&-4\end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix}-3&40\\-5&66\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

ڕێسای کرامەر بۆ شیکارکردنی سیستمە هێڵییەکە بەکاربهێنە.

8. $\begin{cases}6x=2-y\\3x+1=2y\end{cases}$

9. $\begin{cases}4x+y+6=0\\8x+2y=9\end{cases}$

10. $\begin{cases}5x-2y=3\\2.5x-y=1.5\end{cases}$

11. $\begin{cases}2y=2-x\\-3x+6y=-9\end{cases}$

سنووردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

12. $P=\begin{bmatrix}1&2&-1\\4&0&1\\1&-2&3\end{bmatrix}$

13. $S=\begin{bmatrix}0&-5&-1\\4&1&6\\2&0.5&3\end{bmatrix}$

14. $E=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$

15. **بەکاربردن** هەتاو 2kg فستق و 1.5kg باوی و 3kg بندقی کڕی. و بڕی 28420 دینار پارەی دا. بەڵام دوێنی دەستەخوشکی 39390 دینار پارەی دا. لە بڕی کرینی 4.5kg فستق و 2kg بندق. ئایا نرخی هەر کیلۆگرامێك لەهەر جۆرێکیان چەندە؟ ئەگەر بزانیت نرخی یەك کیلۆگرام لە بادەم یەکسانە بە سەرجەمی نرخی کیلۆگرامێك لە فستق وکیلۆگرامێك لە بندق.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

سنووردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

16 $\begin{bmatrix} 3 & -0.4 \\ 5 & 0.3 \end{bmatrix}$ **17** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **18** $\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 8 \\ -\frac{1}{2} & 10 \end{bmatrix}$ **19** $\begin{bmatrix} r & -1 \\ -2r^2 & \pi r \end{bmatrix}$

ڕێسای کرامەر بۆ شیکارکردنی سیستمە هێڵییەکە بەکاربهێنە.

20 $\begin{cases} 0.5x+6y=2 \\ 0.25x+3y=0.5 \end{cases}$ **21** $\begin{cases} x+2y=3.5 \\ 3x-y=2.7 \end{cases}$ **22** $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+\frac{y}{2}=2 \end{cases}$ **23** $\begin{cases} 3y-x=7 \\ 2x+3y=-7 \end{cases}$

سنووردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

24 $A=\begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 & 0 \\ 3.2 & 1 & -4 \\ 6.4 & -5 & 2.1 \end{bmatrix}$ **25** $L=\begin{bmatrix} -2.4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0.5 \\ 0 & 3.5 & 1 \end{bmatrix}$ **26** $W=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

27 **لەش جوانی (ڕەشاقە)** ڤیان ژمارەی کاتژمێرەکانی مەشقی وەرزشی کە پێی هەڵدەستێت لەگەڵ ژمارەی گەرمۆکەکانی گەرمی کە ڕۆژانە بەکاریدەبات، تۆماردەکات. ڤیان چەند گەرمۆکەی پێویستە لەهەر کاتژمێرێکدا بۆ هەر جۆرێك لەو مەشقانەی ئەنجامی دەدات. ڕێسای کرامەر بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکە.

تۆماری کاتەکانی مەشقەکانی ڤیان				
	پایسکل سواری	تۆپی سەرمێز	مەلەوانی	گەرمۆکەی پێویست
دووشەممە	1.5	1	0.75	1620
چوارشەممە	0.75		1	915
هەینی	1	1.5		1320

28 **بیری ڕەخنەگر** بەهای c چەندە بۆ ئەوەی سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان لە سیستمی $\begin{cases} 2x+y=6 \\ cy=3-x \end{cases}$ بکاتە سفر؟ ڕوونیبکەوە چۆنت دۆزیەوە؟

29 **ئینتەرنێت** یەکێك لە ماڵپەڕەکانی ئینتەرنێت داوای هەڵسەنگاندنی بابەتێکی کرد. بە پێدانی خاڵێك یان دوو خاڵ و یان 3 خاڵ. ژمارەی هەڵسەنگێنەران 38 کەس بوو. ژمارەی ئەوانەی 3 خاڵیان دابوو دوو ئەوەندەی ئەوانەبوون کە یەك خاڵیان دابوو، ژمارەی کەسەکانی هەر جۆرە هەڵسەنگاندێك چەندە ئەگەر بزانیت ژمارەی گشتی خاڵەکانی 85 خاڵن؟

سنووردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

30 $A=\begin{bmatrix} x & x-1 \\ x+1 & x \end{bmatrix}$ **31** $B=\begin{bmatrix} x-2 & x+2 \\ x+2 & x+6 \end{bmatrix}$

32 **کانزا بەنرخەکان** پارچەیەك پارەی بچووك لە زیو بارستاییەکەی دەگاتە 2.268g ، و پارچەیەك پارەی گەورە بارستاییەکەی دەگاتە 5g . ئاراس 425 پارچەی لەهەردوو جۆر لایە. بارستاییەکانی پیوا 1483g بوو.

أ ئاراس لە هەر جۆرێك چەند پارچەی لایە؟

ب نرخی پارچە زیوەکان چەندە، ئەگەر نرخی پارچەی بچووك 30000 دینار و نرخی پارچەی گەورە 72000 دینار بێت؟

33 کۆمەڵێك کە لە 6 گەورە و 3 منداڵ پێکهاتبوون سەردانی باخچەی ئاژەڵانیان کرد 48000 دینار پارەیان دا، لە کاتێکدا کۆمەڵێکی تر کە لەدوو گەورە و 10 منداڵ پێکهاتبوون 52000 دینار پارەیان دا بۆ چوونە ژوورەوە.

نەزانراوی x بەکاربهێنە بۆ نرخی پلیتی منداڵ و y بۆ نرخی پلیتی گەورەکان.

أ سیستمی ئەو هاوکێشانە بنووسە، کە ئەم پرسیارە ڕووندەکاتەوە.

ب ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بنووسە وهەژمارەی سنووردەرەکەی بکە.

ج پرسیارەکە چەند شیکاری هەیە؟

د ڕێسای کرامەر بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نرخی هەریەکە لە دوو نەزانراوەکە.

هـ نرخی بلیتی چوونە ژووری گەورەکان چەندە؟ نرخی پلیتی چوونە ژووری منداڵان چەندە؟

34 چ جۆرە باسێك بۆ ئەو سیستمە هێڵییە ڕاستە؟ $\begin{cases} 3x = y - 1 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$

أ دیارینەکراو؛ ژمارەیەکی دیارینەکراو شیکاری هەیە.

ب ئەستەم، زۆر لە شیکاری هەیە

ج ئەستەم، شیکاری نییە.

د دیاریکراو، شیکارێکی تاکانە.

35 کام ڕیزکراوە سنووردەرەکەی دەکاتە 1 ؟

أ $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} -3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

36 **وەڵامی کورت** بەهای x بدۆزەوە ئەگەر $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 25$

ڕوانین بۆ دواوە

37 **بەکاربردن** شیرین 135000 دیناری لابوو کاتێك چووە دوکانێکی پێڵاوی ئافرەتان و پێڵاوێکی بینی کە داشکاندنی 25% ی بۆکرابوو. لاسەنگەیەك بنووسە کە نرخە بنەڕەتییەکەی پێڵاوەکە پاسادانی بکات ئەگەر بزانیت سارە پێڵاوەکەی کڕی.

سیستمی ئەم هاوکێشانە بە لەجیاتیدانان شیکاربکە.

38 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}y \\ 6x - 6y = 16 \end{cases}$

39 $\begin{cases} x + y = -5 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$

40 $\begin{cases} 2x = y \\ 4x + y = -2 \end{cases}$

ڕوانین بۆ پێشەوە

41 **شارستانی** بەمەبەستی دانانی پەیکەرێك لە یەکێ لە گورەپانەکانی شارێك، کە لەدوو بەشی باکوور وباشوور پێکهاتبوو، ڕاپرسییەك لە نێوان دانیشتوانەکەی ئەنجامدرا. خشتەی بەرامبەر پوختەی ئەنجامەکانی ڕاپرسییەکە بە ڕێژەی سەدی دەردەخات. ئایا لە بەشی باشوور چەند هاووڵاتی دەنگی خۆی داوە، ئەگەر بزانیت ژمارەی دەنگەدەران 4826 کەسبووە.

ئەنجامەکانی ڕاپرسییەکە		
بەش	لەگەڵ دانانن	دژی دانانن
باکوور	47%	53%
باشوور	85%	15%
سەرجەم	49%	51%

جیاکاری Differential

بەشی 6

وانەکان



خێرایی چییە؟

دەتوانی جیاکاری بەکاربهێنی بۆ هەژمارکردنی خێرایی تەنێکی جوولاو لەهەر ساتێکی جوولانی.

وانەی
1

1 داتاشراو
1 Derivative

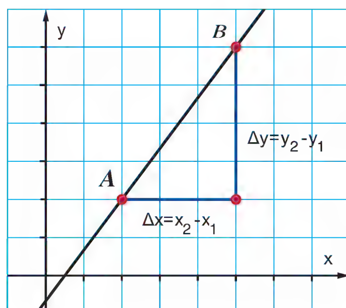


بۆچی
ئابووری ناسەکان داتاشراو بەکاردێنن وەك ئامێرێك لە ئامێرەکانی شیتەڵی ئابووری

ئابووری ناسەکان بیرکاری بەکاردێنن بۆ دۆزینەوەی نموونەکانی کە یارمەتی لێکۆڵینەوەی چالاکییە جیاوازەکانی ئابووری دەدات وەك بەرهەمهێنان و فرۆشراوەکان و قازانجەکان و....هتد ئەگەر دامەزراوەیەك کە جۆرێك لە ئامێری سادە دروست دەکات بەنموونە وەربگرین هەوڵ بدەین نموونەیەك بۆ تێچوونی بەرهەمهێنان بدۆزینەوە دەبینین کە تێچووی بەرهەمهێنان لە دووبەش پێکدێت. بەشی نەگۆر کە قەت ناگۆرێت بڕی بەرهەمهاتوو هەر چەند بێت.
بەشی گۆڕاو دەگۆرێت بە گۆڕانی هێندی بەرهەم. کە هێمای F بۆ بەشی نەگۆڕو هێمای x بۆ ژمارەی یەکەکانی بەرهەمهێنان، دابنێن ئەگەر تێچوونی یەك یەکە بکاتە m دەتوانین $C = mx + F$ بنووسین کاتێك C تێچوونی بەرهەمهێنانی گشتییە..
ئەگەر بەرهەمهێنانی 100 یەکە بکاتە 500 000 دینار، ئایا کاریگەری بەرهەمهێنانی یەکەیەکی زیاتر چەندە لەسەر تێچوونی بەرهەمهێنانی گشتی؟ ئاشکرایە کە بەرهەمهێنانی یەکەیەکی زیاتر تێچوونی بەرهەمی گشتی بەبڕی 5000 دینار زیاد دەکات ئابووری ناسەکان بەو زیادە دەڵێن تێچوونی پەراوێزی بەرهەمهێنان.
لە نموونەی پێشوو ئاماژە بە بەرهەمهێنانی یەك یەکە لە تێچوونی بەرهەمهێنانی گشتی دەکات کە m ، بەڵام کارەکە بەم شێوەیە نییە لە بارەکانی تر کاتێك نموونە بیرکارییەکەی تێچوونی بەرهەمهێنانی نەخشەیەکی هێڵی نییە (نەخشەی دووجایە). لەم پۆلەدا فێری چەمکەکان و کارامەییەکان دەبین کە یارمەتیدەرن بۆ شیکارکردنی ئەو پرسیارە و پرسیارەکانی تر.
ئەگەر بگەڕێینەوە بۆ نموونەی پێشوو دەبینین پەراوێزی تێچوونی بەرهەمهێنانی پەراوێزی دەکاتە m لاری ڕاستەهێڵی $C = mx + F$کە نموونەی تێچوونی گشتی بەرهەمهێنانە، و دەتوانین بەشێوەی ڕێژەی گۆڕانی تێچوونی بەرهەمهێنان بۆ گۆڕانی هێندی بەرهەمهێنراو وەك ئەمەی خوارەوە

$$m = \frac{C_2 - C_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

$\triangle$ پیتێکی یۆنانییە بە (دەلتا) دەخوێندرێتەوە.



ئەگەر تەماشای وێنەی بەرامبەر بکەین دەبینین ڕاستەهێڵێك بە دوو خاڵی A و B دا دەڕوات لاری ڕاستەهێڵ m دەکاتە

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

کەدەکاتە ڕێژەی گۆڕانی بەهای y بۆ گۆڕانی بەهای x .
دەردەکەوێت کە لاری هەمان بەهای هەیە ئەگەر A و B هەر خاڵێك بن لەسەر ڕاستەهێڵەکە.
ئایا پرسیارت کردووە لاری هێڵێکی چەماوە چییە بۆ نموونەی نەخشەی $y = x^2$.

ئامانجەکان
- دۆزینەوەی داتاشراوی نەخشە بەجێبەجێکردنی ڕێساکانی یەکەمی داتاشراو.

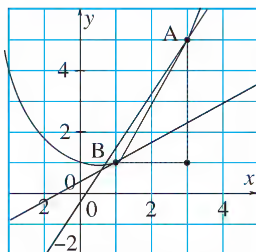
زاراوەکان
Vocabulary

لاری	Slope
داتاشراو	Derivative
داتاشراوی یەکەم	First derivative
داتاشراوی دووەم	Second derivative

ناتوانرێت پێناسەی لاری نەخشەی $y=x^2$ بەم ڕێگایەی پێشوو بکرێت، چونکە هێڵێکی چەماویە، بەڵام بیرکاری زانەکان گرێی ئەم نەخشە و نەخشەکانی تریشیان چارەسەرکردووە لە ڕێگای پێناسەکردنی لارییەوە لە هەر خاڵێك لە خاڵەکانی دا.

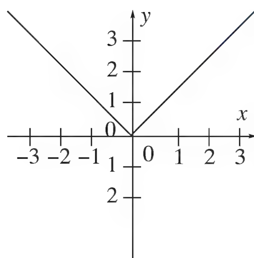
لاری نەخشەیەك لە خاڵێك لە خاڵەکانی ڕوونکردنەوەکەی

- لاری نەخشە یان ڕوونکردنەوەکەی لە خاڵی B سەر ڕوونکردنەوەکەی بریتییە لە لاری لێکەوتی چەماوەکە (ڕوونکردنەوەکەی) لەو خاڵەدا.



بۆ شیکردنەوەی ئەو پێناسانە بیرکاریزانەکان لە خاڵی B و خاڵی A کە نزیکە لێی لەسەر ڕوونکردنەوەکەی دوو ڕاستەهێڵ دەکێشن کە بەو دوو خاڵەدا بڕوات و لێکەوتی چەماوەکە لە خاڵی B دەکێشن (تەماشای وێنەی بەرامبەر بکە).

گریمان خاڵی B جێگیرە و خاڵی A لەسەر ڕوونکردنەوەکە دەجووڵێت ئەگەر وات دانا کە A دەجووڵێت لەسەر چەماوەکە لە B نزیکدەبێتەوە دەبینین ڕاستەهێڵی AB لە لێکەوتەکە نزیکدەبێتەوە بە ئاڕاستەی جووتبوون لەگەڵی دەتوانین ئەمە دەربڕین بەوەی کە لێکەوتەکە بریتییەلە ئامانجی ڕاستەهێڵی AB ، کاتێ A لە B نزیك دەبێتەوە. ئەمەش پێناسەی بیرکاری زاناکانمان بۆ شیدەکاتەوە بۆ لاری نەخشەی f لە خاڵی B.



ئایا هەموو نەخشەیەك لەهەر خاڵێکی چەماوەکەیدا لاری هەیە؟

وەڵام : نەخێر.

ئەگەر تەماشای ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=|x|$ بکەین دەبینین کە لێکەوتی نییە لە خاڵی $(0,0)$ دەردەچێت کە لاری ئەم نەخشەیە پێناسە نەکراوە لە خاڵی بنەڕەتدا، بەڵام زۆربەی ئەو نەخشانەی کە وەریان دەگرین لارییان هەیە لەهەر خاڵێك لە خاڵەکانی سەر ڕوونکردنەوەکەی.

داتاشراوی نەخشە

- داتاشراوی نەخشەی f بریتییەلە نەخشەی f' کە هەربەهایەك لە بەهایەکانی x دەبەستێتەوە بە لاری نەخشەکە لە خاڵی $(x, f(x))$ ئەگەر پێناسەکراوبێت.

چۆن داتاشراوی نەخشە دەدۆزیەوە؟

بۆ دۆزینەوەی داتاشراوی نەخشە بیرکاریزانەکان چەند ڕێسایەکیان داناوە و ڕاستییەکانیان سەلماندووە لەم بەشەدا ئەم ڕێسایانە فێردەبی و چۆن بەکاریان دەهێنیت.

ڕێسای داتاشراوی نەخشەی نەگۆڕ

- نەخشەی نەگۆڕ نەخشەیەکە هاوکێشەکەی بەشێوەی $f(x)=c$ دەنووسرێت کاتێ c ژمارەیەکی ڕاستیە. داتاشراوی نەخشەی نەگۆڕ $f(x)=c$ بریتییەلە نەخشەی $f'(x)=0$.

نموونە 1 دۆزینەوەی داتاشراوی نەخشەی نەگۆڕ

داتاشراوی نەخشەی $f(x)=-3$ بدۆزەوە

شیکار

دەتوانیت بە پشت بەستن بە ڕێسای داتاشراوی نەخشەی نەگۆڕ بنووسیت $f'(x)=0$

هەوڵبدە داتاشراوی نەخشەی $f(x)=\sqrt{3}$، بدۆزەوە.

ڕێسای داتاشراوی نەخشەی هێڵی

- داتاشراوی نەخشەی هێڵی $f(x)=ax+b$ بریتییەلە نەخشەی $f'(x)=a$

نموونە 2 دۆزینەوەی داتاشراوی نەخشەی هێڵی

داتاشراوی نەخشەی هێڵی $f(x)=\pi x-\sqrt{2}$ بدۆزەوە

شیکار

دەتوانیت بە پشت بەستن بە ڕێسای داتاشراوی نەخشەی هێڵی دەکاتە $f'(x)=\pi$

هەوڵبدە داتاشراوی نەخشەی $f(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{2}{3}$ بدۆزەوە.

نەخشەی هێزی نەخشەیەکە ڕێساکەی بە شێوەی $f(x)=x^n$ دەنوسرێت کە n ژمارەیەکی تەواوی مووجەبە.

ڕێسای داتاشراوی نەخشەی هێز

- داتاشراوی نەخشەی $f(x)=x^n$ بریتییە لە نەخشەی $f'(x)=nx^{n-1}$

نموونە 3 دۆزینەوەی داتاشراوی نەخشەی هێز

داتاشراوی نەخشەی $f(x)=x^5$ بدۆزەوە

شیکار

دەتوانیت بە پشت بەستن بە ڕێسای داتاشراوی نەخشەی هێز دەبێتە $f'(x)=5x^{5-1}=5x^4$

هەوڵبدە داتاشراوی نەخشەی $f(x)=x^{12}$ بدۆزەوە.

دەتوانرێ ڕێسای نەخشەی هێز فراوانتر بکرێت بۆ نەخشەکانی $f(x)=x^p$ کاتێ P ژمارەیەکی ڕێژەی سالب یان مووجەب بێت.

فراوانکردنی ڕێسای داتاشراوی نەخشەی هێز

- داتاشراوی نەخشەی $f(x)=x^p$ کاتێك P ژمارەیەکی ڕێژەییە دەکاتە $f'(x)=px^{p-1}$

نموونە 4 **دۆزینەوەی داتاشراوی نەخشەی هێزی**

داتاشراوی نەخشەی: أ $f(x)=\frac{1}{x}$ ب $g(x)=\sqrt{x}$

بدۆزەوە

شیکار

هەرنەخشەیەك بە شێوەی نەخشەی هێز بنووسە

$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$ و $g(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

دەتوانیت پشت بە ڕێسای فراوانکراوی داتاشراوی نەخشەی هێز ببەستیت

$$f'(x)=(-1)x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

هەوڵبدە داتاشراوی نەخشەی $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ بدۆزەوە.

ڕێسای داتاشراوی ئەنجامی لێکدانی نەخشەی هێز لە ژمارەیەکی ڕاستی

- داتاشراوی نەخشەی $g(x)=af(x)$ بریتییەلە نەخشەی $g'(x)=af'(x)$

نموونە 5 **دۆزینەوەی داتاشراوی ئەنجامی لێکدانی نەخشەی هێز لە ژمارەی ڕاستی**

داتاشراوی نەخشەی $f(x)=-5\sqrt[5]{x^3}$ بدۆزەوە

شیکار

نەخشەکە بە شێوەی ئەنجامی لێکدانی نەخشەی هێز لە ژمارەیەکی ڕاستی بنووسە:

$$f(x)=-5\sqrt[5]{x^3}=-5x^{\frac{3}{5}}$$

دەتوانیت پشت بە ڕێسای داتاشراوی ئەنجامی لێکدانی نەخشەی توانی لە ژمارەی ڕاستی ببەستیت.

$$f(x)=-5\left(x^{\frac{3}{5}}\right)\Longrightarrow f'(x)=-5\left(\frac{3}{5}\right)\left(x^{\frac{3}{5}-1}\right)=-3x^{-\frac{2}{5}}=-3\frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}=\frac{-3}{\sqrt[5]{x^2}}\text{ ،}$$

هەوڵبدە داتاشراوی نەخشەی $f(x)=\frac{-4}{x^{5}}$ بدۆزەوە.

لەبەرئەوەی داتاشراوی نەخشەیەك ئەویش نەخشەیە کەواتە دەتوانرێت داتاشراوەکەی بدۆزرێتەوە.
بۆیە بە داتاشراوی نەخشەکە دەوترێت داتاشراوی یەکەم و بە داتاشراوی داتاشراوەکە دەوترێت داتاشراوی دووەم.

داتاشراوی دووەم

- داتاشراوی دووەمی نەخشەی f دەکاتە داتاشراوی داتاشراوەکەی بەشێوەی f^{n} دەنووسرێت

واتە f''. $f''(x)=(f')'(x)$

نموونه 6 **دۆزینەوەی داتاشراوی یەکەم و داتاشراوی دووەم**

داتاشراوی یەکەم و داتاشراوی دووەمی نەخشەی $f(x)=\frac{x^3}{6}$ بدۆزەوە

شیکار

نەخشەکە بە شێوەی ئەنجامی لێکدانی نەخشەی هێز لە ژمارەی ڕاستی بنووسە

$$f(x)=\frac{x^3}{6}=\frac{1}{6}x^3$$

دەتوانیت پشت بە ڕێسای داتاشراوی ئەنجامی لێکدانی نەخشەی توانی لە ژمارەی ڕاستی و ڕێسای داتاشراوی نەخشەی توانی ببەستیت.

$$f'(x)=\frac{1}{6}(x^3)'=\frac{1}{6}(3)\left(x^{3-1}\right)=\frac{1}{2}x^2$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=\frac{1}{2}(x^2)'=\frac{1}{2}(2)(x^{2-1})=x$$

هەوڵبدە داتاشراوی یەکەم و داتاشراوی دووەمی نەخشەی $f(x)=\frac{-4}{x^5}$ بدۆزەوە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. جیاوازی لە نێوان لاری نەخشەی هێڵی و نەخشەی ناهێڵی چیە.
2. شیکردنەوەیەك بهێنەرەوە بۆ پێناسەی لاری نەخشەیەك لە هەر خاڵێك لەخاڵەکانی ڕوونکردنەوەکەی.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

داتاشراوی ئەم نەخشانە بدۆزەوە

3. $f(x)=-\sqrt{5}$
4. $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. $f(x)=\frac{5}{8}$
6. $f(x)=0$
7. $f(x)=3x-4$
8. $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}x-\frac{5}{6}$
9. $f(x)=x$
10. $f(x)=x^{11}$
11. $f(x)=\frac{1}{x^3}$
12. $f(x)=\sqrt{x^5}$
13. $f(x)=\sqrt[4]{x^3}$
14. $f(x)=-\frac{1}{x^{11}}$
15. $f(x)=-\frac{1}{x^{-3}}$
16. $f(x)=3x+5$
17. $f(x)=3\sqrt{x}-4$
18. $f(x)=\frac{3}{x^4}$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

داتاشراوی ئەم نەخشانە بدۆزەرەوە

19. $f(x)=3x^{\frac{2}{5}}$
20. $f(x)=3x^2$
21. $f(x)=\frac{9}{x^5}$
22. $f(x)=\frac{9}{\sqrt{x}}$
23. $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$
24. $f(x)=2\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

25 $f(x)=\frac{3x^2}{4}$ **26** $f(x)=\frac{2}{3\sqrt{x}}$ **27** $f(x)=9x^{-5}$

28 $f(x)=\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$ **29** $f(x)=x\sqrt{x}$ **30** $f(x)=\frac{1}{2x^2\sqrt{x}}$

31 داتاشراوی یەکەم و دووەمی ئەم نەخشەیە بدۆزەوە $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

32 داتاشراوی یەکەم و دووەمی ئەم نەخشەیە بدۆزەوە $f(x)=\frac{x^6}{6}$



ڕوانین بۆ دواوە

33 هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بدۆزەوە کە بە دووخاڵی $(0, 1)$ و $(3, 3)$ دا دەڕوات.

34 سستەمی ئەو دوو هاوکێشە هێڵییە شیکاربکە $\begin{cases} 2x = 3y - 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$.

35 سستەمەکەی پێشوو شیکاربکە بەبەکارهێنانی ڕێزکراوەکان.



ڕوانین بۆ پێشەوە

36 داتاشراوی ئەم دوو نەخشەیە بدۆزەوە $f(x)=x^3$ و $g(x)=\sqrt{x^3}$.

37 دوو نەخشەی پرسیاری پێشوو بەکاربێنە و هاوکێشە نەخشەی $h(x)=f(x)g(x)$ و هاوکێشە نەخشەی $k(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ بنووسە.

بە شێوەی هێزەکانی x ، داتاشراوی نەخشەی h بدۆزەوە و بەراوردی بکە لەگەڵ ئەوەی دەستدەکەوێت لە نەخشەی k .

چ دەرئەنجامێکت دەربارەی داتاشراوی $f(x)g(x)$ دەبێت؟

وانەی 2

داتاشراوی دووەم

2 Derivative



بۆچی داتاشراوی یەکەم و دووەم بەکاردێت بۆ لێکۆڵینەوەی تەنێکی جووڵاو لەسەر هێڵێکی ڕاست.

ئامانجەکان

- دۆزینەوەی داتاشراوی نەخشە بەبەکارهێنانی ڕێساکانی داتاشراو

لەوانەی پێشوو چەند ڕێسایەکی داتاشراو فێربوویت و لەم وانەیەشدا هەندێ ڕێسای تر فێردەبیت کە یارمەتیت دەدات بۆ دۆزینەوەی داتاشراوی چەند نەخشەیەکی فراوانترو ئاڵۆزتر.

ڕێساکانی داتاشراو کە لەم وانەیەدا فێری دەبیت بەستراوەتەوە بەو کردارانەی لەسەر نەخشەکان ئەنجامی دەدەیت وەك کۆکردن و کەمکردن و لێکدان و دابەشکردن. ئەگەر f و g دوو نەخشە بن دەتوانیت کۆیان بکەیتەوە ئەوا $f+g$ بریتییە لەو نەخشەی کە پێناسەکراوە بە هاوکێشەی $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ و دەتوانیت جیاوازی نێوانیان وەك $f-g$ بنووسیت کە نەخشەیەکە پێناسەکراوە بە هاوکێشەی: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

ڕێسای داتاشراوی سەرجەم یان جیاوازی دوو نەخشە

- داتاشراوی سەرجەم و جیاوازی دوو نەخشە بەم ڕێسایەی خوارەوە هەژمار دەکرێت

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

یان $$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$$

نموونە

1 دۆزینەوەی داتاشراوی سەرجەمی دوو نەخشە

داتاشراوی نەخشەی $h(x)=3x^2-5x+4$ بدۆزەوە

شیکار

سەرەتا نەخشەی h وەك سەرجەمی دوو نەخشەی f و g بنووسە.

ئەگەر نەخشەی $f(x)=3x^2$ و نەخشەی $g(x)=-5x+4$ ئەوا

$$h(x)=(3x^2)+(-5x+4)=f(x)+g(x)$$

بە پشت بەستن بە ڕێسای داتاشراوی سەرجەمی دوو نەخشە دەتوانیت $h'(x)=f'(x)+g'(x)$ بنووسیت و لەبەرئەوەی $f'(x)=6x$ و $g'(x)=-5$ ئەوا $h'(x)=6x-5$

هەوڵبدە داتاشراوی نەخشەی $f(x)=5x^4+3x-\sqrt{3}$ بدۆزەوە.

نموونە **2**

دۆزینەوەی داتاشراوی جیاوازی نێوان دوو نەخشە

داتاشراوی نەخشەی $h(x)=3x^2-5x+4$ بدۆزەوە

شیکار

سەرەتا نەخشەی h بە شێوەی دوو نەخشەی f و g بنووسە ئەگەر نەخشەی $f(x)=3x^2$ و نەخشەی $g(x)=5x-4$ بێت ئەوا $h(x)=(3x^2)-(5x-4)=f(x)-g(x)$

دەتوانیت پشت بەرێسای داتاشراوی جیاوازی نێوان دوونەخشە ببەستێت، ئەوا بنووسیت $h'(x)=f'(x)-g'(x)$ لەبەرئەوەی $f'(x)=6x$ و $g'(x)=5$ ئەوا $h'(x)=6x-5$.

هەوڵبدە داتاشراوی نەخشەی $f(x)=2x^3-3x-5$ بدۆزەوە.

ئەگەر f و g دوو نەخشەبن دەتوانرێت بەشێوەی ئەنجامی لێکدانی دو نەخشەی f , g بنووسرێت، بریتییەلە نەخشەیەك هاوكێشەكەی بەم شێوەیە پێناسە دەكرێت: $(fg)(x)=f(x)\times g(x)=f(x)g(x)$

ڕێسای داتاشراوی ئەنجامی لێکدانی دوو نەخشە

- داتاشراوی ئەنجامی لێکدانی دوو نەخشە بەم ڕێسایەی خوارەوە هەژمار دەکرێت.
$$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

نموونە **3**

دۆزینەوەی داتاشراوی ئەنجامی لێکدانی دوو نەخشە

داتاشراوی ئەم نەخشەیە $h(x)=\frac{1}{x}(x^2+3)$ بدۆزەوە.

شیکار

سەرەتا نەخشەی h بە شێوەی ئەنجامی لێکدانی دوو نەخشەی f و g بنووسە ئەگەر نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x}$ و نەخشەی $g(x)=x^2+3$ بێت ئەوا

$$h(x)=\frac{1}{x}(x^2+3)=f(x)g(x)$$

داتاشراوی هەریەك لەم دوو نەخشەیە هەژماربكە

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=(-1)\left(x^{-2}\right)=-\frac{1}{x^2}$$

$$g'(x)=\left(x^2\right)'+(3)'=(2x)+(0)=2x$$

دەتوانیت پشت بە ڕێسای داتاشراوی ئەنجامی لێکدانی دوو نەخشە ببەستیت

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

لەبەرئەوەی $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ و $g'(x)=2x$ ئەوا

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+3\right)+\left(\frac{1}{x}\right)(2x)$$

یان $$h'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+3\right)+\left(\frac{1}{x}\right)(2x)=-1-\frac{3}{x^2}+2=1-\frac{3}{x^2}$$

یان دەتوانین دوو نەخشەکە لەیەکتری بدەین ئینجا داتاشراوەکە بدۆزینەوە

$$h(x)=\frac{1}{x}(x^2+3)=x+\frac{3}{x}=x+3\frac{1}{x}$$

$$h'(x)=\left(x+3\frac{1}{x}\right)'=(x)'+\left(3\frac{1}{x}\right)=1+3\left(\frac{1}{x}\right)'=1+3\left(-\frac{1}{x^2}\right)=1-\frac{3}{x^2}$$

هەوڵبدە داتاشراوی نەخشەی $f(x)=\left(x^2+5\right)\sqrt{x}$ بدۆزەوە

ئەگەر f و g دوونەخشەبن دەتوانرێ بە شێوەی ئەنجامی دابەشکردنی دوونەخشەی $\frac{f}{g}$ بنووسرێت بریتییەلە نەخشەیەك بەم هاوكێشەی خوارەوە پێناسەكراوە:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$ کاتێك $g(x)\neq 0$

ڕێسای داتاشراوی ئەنجامی دابەشبوونی دوو نەخشە

- داتاشراوی ئەنجامی دابەشبوونی دوونەخشە بەم ڕێسایەی خوارەوە هەژمار دەکرێت

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

نموونە 4 دۆزینەوەی داتاشراوی ئەنجامی دابەشبوونی دوو نەخشە

داتاشراوی نەخشەی $h(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ بدۆزەوە.

شیکار

سەرەتا نەخشەی h بە شێوەی ئەنجامی دابەشبوونی دوونەخشەی f و g بنووسە ئەگەر نەخشەی $f(x)=x^2-1$ و نەخشەی $g(x)=x^2+1$ ئەوا داتاشراوی دوونەخشەی f و g هەژماربکە

$$h(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$f'(x)=\left(x^2-1\right)'=\left(x^2\right)'-(1)'=(2x)-(0)=2x$$

$$g'(x)=\left(x^2+1\right)'=\left(x^2\right)'+(1)'=(2x)+(0)=2x$$

دەتوانیت پشت بە ڕێسای داتاشراوی ئەنجامی دابەشبوونی دوونەخشە ببەستیت

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

لەبەرئەوەی $f'(x)=2x$ و $g'(x)=2x$

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}=\frac{(2x)(x^2+1)-(x^2-1)(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$h'(x)=\frac{(2x)\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\left(x^2+1-\left(x^2-1\right)\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

هەوڵبدە داتاشراوی نەخشەی $f(x)=\frac{x^2-2}{x+1}$ بدۆزەرەوە

زۆر نەخشە هەیە بە شێوەی هێزی نەخشەیەکی تر دەنووسرێت بۆ نموونە نەخشەی $f(x)=\left(x^2+1\right)^4$ ئەوە هێزێکە لە هێزەکانی نەخشەی $u(x)=x^2+1$ کە بە شێوەی $f(x)=\left[u(x)\right]^4$ دەنووسرێت.

ڕێسای داتاشراوی هێزی نەخشە (نەخشەی نەخشە)

- ئەگەر نەخشەی f یەکێ لە هێزەکانی هێزی نەخشەی u بێت کە $f(x)=\left[u(x)\right]^p$ کاتێ p ژمارەیەکی ڕێژەیی بێت ئەوا داتاشراوەکەی بەم ڕێسایە هەژماردەکرێت.

$$f'(x)=pu'(x)\left[u(x)\right]^{p-1}$$

نموونە 5 دۆزینەوەی داتاشراوی هێزی نەخشە

داتاشراوی ئەم نەخشانەی خوارەوە بدۆزەوە

أ $f(x)=(x^2+1)^4$ ب $f(x)=\dfrac{1}{x^3+2x+1}$ ج $f(x)=\sqrt{x^2-x+2}$

شیکار

سەرەتا نەخشەکە بە شێوەی هێزی نەخشەیەکی تر بنووسە وەك $u(x)$ و $u'(x)$ و p

أ $u(x)=x^2+1$ $u'(x)=2x$ $p=4$ لەوەوە دەردەچێت کە

$$f'(x)=pu'(x)\left[u(x)\right]^{p-1}=4(2x)\left(x^2+1\right)^3=8x\left(x^2+1\right)^3$$

ب $u(x)=x^3+2x+1$ $u'(x)=3x^2+2$ $p=-1$ لەوەوە دەردەچێت کە

$$f'(x)=pu'(x)\left[u(x)\right]^{p-1}=(-1)(3x^2+2)\left(x^3+2x+1\right)^{-2}=\frac{-3x^2-2}{\left(x^3+2x+1\right)^2}$$

ج $u(x)=x^2-x+2$ $u'(x)=2x-1$ $p=\frac{1}{2}$ لەوەوە دەردەچێت کە

$$f'(x)=pu'(x)\left[u(x)\right]^{p-1}=\frac{1}{2}(2x-1)\left(x^2-x+2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+2}}$$

هەوڵبدە داتاشراوی ئەم نەخشانە بدۆزەرەوە:

أ $f(x)=(x^3+4x^2+2)^5$ ب $f(x)=\dfrac{1}{x^4+2x^2+2}$ ج $f(x)=\sqrt{x^6-2}$

ڕاهێـــــنـــــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1. ڕوونیبکەوە چۆن ڕێسای داتاشراوی سەرجەم و داتاشراوی لێکدانی نەخشە لە ژمارەیەکی ڕاستی داتاشراوی هێز بەکاردێنی بۆئەوەی دەربیخەی کە داتاشراوی نەخشەی هێڵی $f(x)=ax+b$ دەکاتە $f'(x)=a$.

2. ڕێساکانی داتاشراو بەکاربهێنە بۆئەوەی دەربیخەی کە داتاشراوی نەخشەی دووجا $f(x)=ax^2+bx+c$ دەکاتە $f'(x)=2ax+b$

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

داتاشراوی ئەم نەخشانەی دێن بدۆزەوە؟

3. $f(x)=5x^2+\frac{2}{x^3}$

4. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

5. $f(x)=2x^3-\frac{1}{x^2}+5$

6. $f(x)=(x^2+2x)\sqrt{x+1}$

7. $f(x)=\frac{5x^3+x-1}{x^2+1}$

8. $f(x)=(5x^2+3x+5)^7$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

داتاشراوی بۆ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە:

9. $f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$

10. $f(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}$

11. $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[5]{x}}$

12. $f(x)=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x+1}$

13. $f(x)=\sqrt[3]{x}\left(\frac{6}{\sqrt{x}}+1\right)$

14. $f(x)=\sqrt{x-1}\sqrt[3]{x-2}$

15. $f(x)=\frac{x^3-2x}{x-1}$

16. $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{x+1}$

17. $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+5}}{x^2+1}$

18. $f(x)=\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^3$

19. $f(x)=\sqrt{3x^2-5x+2}$

20. $f(x)=\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2$

21. **بەڕێوەبردنی کۆگا کراوەکان** نەخشەی $A(q)=\frac{km}{q}+cm+\frac{hq}{2}$ بەکاردێت وەك نموونەیەك بۆ بەڕێوەبردنی کۆگا کراوەکان لە کۆگا گەورەکاندا. کاتێك

- A ناوەندی تێچووی خەرجی کۆگاکەیە لە هەفتەدا.
- q هێندی کڕدراو
- k تێچوونی داواکاری کڕین
- c نرخی کڕینی یەك دانە (یەك دەنك)
- m ژمارەی ئەو یەکانەی کڕدراون
- h تێچوونی عەمبارکردنی یەك دانە (یەك دەنك)

داتاشراوی یەکەم و دووەمی نەخشەی A بدۆزەرەوە.

22 **گیرەی کاغەز (مِشْبَك وَرَق)** دەتوانی بە ئاسانی گیرەی کاغەز بۆ سەرەوە لەهەوادا فڕێ بدەیت، بە بەکارهێنانی شریتێکی لاستیکی. ئەم نەخشەیە بۆ دیاریکردنی بەرزی گیرەکە بەمەتر بەکاردێت $h(t)=39.2t-4.9t^2$ دوای t چرکە لە هەڵدانییدا. داتاشراوی ئەم نەخشەیە $h'(t)$ خێرایی گیرەکە دەردەبڕێت لەکاتی t دا .

أ خێرایی گیرەکە بدۆزەوە لەکاتی t ، خێراییەکەی چەندە کاتێك $t=3$ ، $t=4$ ، $t=5$.

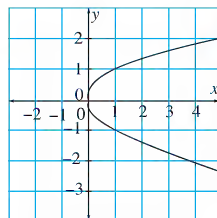
ب خێرایی گیرەکە چەندە کاتێ دەگاتە ئەوپەڕی بەرزی پێش دەست بە هاتنە خوارەوە بکات؟ وەڵامەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئەوکاتەی گیرەکە پێ گەیشتۆتە ئەوپەڕی بەرزی، و ئەو بەرزیە چەندە؟

ج لەسەر ڕووی مانگ نەخشەی $h(t)=39.2t-0.79625t^2$ بەکاردێت بۆ دیاریکردنی بەرزی گیرەکە بەمەتر دوای t چرکە لە دەرچوونی. خێرایی گیرەکە چەندە کاتێ دەگاتە ئەوپەڕی بەرزی پێش دەستکردن بە هاتنە خوارەوەی؟ وەڵامەکەت بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئەو کاتەی گیرەکە پێی گەیشتۆتە ئەوپەڕی بەرزی، و ئەو بەرزییە چەندە؟

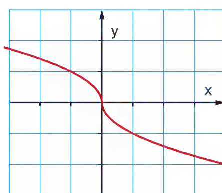
ڕوانین بۆ دواوە

دەری بخە کام لەم چەماوانەی خوارەوە نەخشە دەنوێنن یان نا، وەڵامەکەت شیبکەوە.

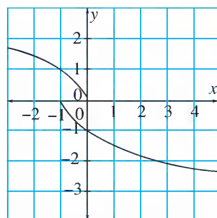
23



24



25



26 کام لەم نەخشانە دووجایيە؟

أ $f(x)=1-2x+x^3$

ب $f(x)=1+\frac{1}{x^2+1}$

ج $f(x)=2x3+4x^2$

د $f(x)=1-2x$

ڕوانین بۆ پێشەوە

27 نەخشەی لادانی (شوێن) جووڵانی تەنێك لەسەر ڕاستەهێڵێك بریتییە لە $s(t)=t^3-3t+50$ کاتێ دووری بە مەترو کات بە خولەك دەپێورێت دوای چەند خولەك خێرایی تەنەکە دەبێتە سفر؟ شوێنی تەنەکە لەوکاتەدا کوێیە؟

وانەی 3

جێبەجێکردنەکانی داتاشراو

Applications of Derivative



بۆچی داتاشراوی یەکەم بەکاردێت بۆ دۆزینەوەی گۆشەی هەڵدانی گوللەتۆپێك بۆ ئەوەی بگاتە دوورترین دووری کە لە توانادایە.

داتاشراو لە زۆر بواردا بەکاردێت. ئێستا بەکارهێنان لە سێ بواردا باس دەکەین نواندنی ڕوونکردنەوەیی، جوڵانی تەن، بواری ئابووری

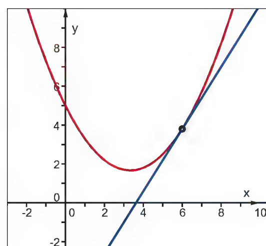
ئامانجەکان

- داتاشراو بۆ دۆزینەوەی پێوەری پەراوێزکراوی پێوەری ئابووری بەکاردێنێت.
- بەکارهێنانی داتاشراو بۆ دۆزینەوەی هاوکێشەی لێکەوتی چەماوەی نەخشە لە خاڵێکی دیاریکراو.
- بەکارهێنانی داتاشراو بۆدۆزینەوەی خێرایی و تاودانی تەنێك لەسەر هێڵێکی ڕاست دەجووڵێت.

فێربوویت کە داتاشراوی نەخشەی f لە خاڵی P دا لەسەر ڕوونکردنەوەکەیدا لاری لێکەوتی چەماوەکەیە لەو خاڵەدا. ئەگەر داتاشراوی نەخشەیەکمان لە خاڵی P دا زانی ئەوا لاری لێکەوتەکەمان زانی. ئەو کات شێوەی لاری–خاڵ و پۆوتانی P بەکاردێت بۆ دۆزینەوەی هاوکێشەی لێکەوتەکە.

نموونە 1 **دۆزینەوەی هاوکێشەی لێکەوتی برگەی هاوتا لە یەکێ لە خاڵەکانیدا**

هاوکێشەی لێکەوتی برگە هاوتای $f(x)=0.3x^2-2x+5$ لە خاڵی P دا کە پۆوتانی یەکەمی $x=6$ بدۆزەوە



شیکار

شێوەی لاری–خاڵ بۆ هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بریتییەلە $y-y_1=m(x-x_1)$

$x_1=6$ و $y_1=f(6)=3.8$ دراوە و بۆ هەژمارکردنی لاری m،

داتاشراوی نەخشەی $f(x)=0.3x^2-2x+5$ دەدۆزینەوە کاتێ $x=6$.

$$f'(x)=(0.3x^2)'-(2x)'+(5)'=0.3\left(x^2\right)'-2(x)'+(5)'=0.3(2x)-2(1)+(0)=0.6x-2$$

بەهای m کاتێ $x=6$ دەکاتە $f'(6)=0.6(6)-2$ $=3.6-2=1.6$ ، کەواتە لاری لێکەوتەکە دەکاتە 1.6

ئێستا شێوەی لاری – خاڵ بۆ هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بەکاربهێنە:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-3.8=1.6(x-6)$$
$$y=1.6x-5.8$$

هاوکێشەی لێکەوتی برگەی هاوتای $y=0.3x^2-2x+5$ لە خاڵی $P(6,\ 3.8)$ دا دەکاتە $y=1.6x-5.8$.

هەوڵبدە هاوکێشەی لێکەوتی چەماوەی برگەی هاوتای $f(x)=2x^2+3x-6$ لە خاڵی P کە پۆوتانی یەکەمی $x=1$ بدۆزەوە

نموونە 2

دۆزینەوەی هاوکێشەی لێکەوتی برگەی هاوتاو ئەستوون لەسەر لێکەوتەکەی لە خاڵێك لە خاڵەکانیدا

هاوکێشەی هەریەکە لە لێکەوت و ئەستوونی سەرلێکەوت بۆ ڕوونکردنەوەی برگە هاوتای $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-2$ لەخاڵی p کە پۆیەکەی $x=-2$ بدۆزەوە.

شیکار

شێوەی لاری – خاڵ بۆ هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکە دەکاتە $y-y_1=m(x-x_1)$.

هەمانە $x_1=-2$ و $y_1=f(-2)=-2$ بۆ هەژمارکردنی لاری لێکەوتەکە دەبێت داتاشراوی نەخشەکە بدۆزینەوە کاتێ $x=-2$.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'+(x)'-(2)'=\frac{1}{2}(x^2)'+1-0=\frac{1}{2}(2x)+1=x+1$$

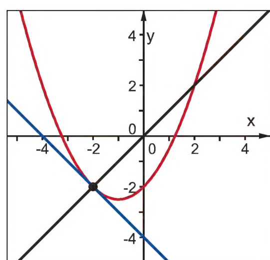
بەهای داتاشراوەکە کاتێ $x=-2$ دەکاتە $f'(-2)=-2+1=-1$ ئەوا $m=f'(-2)=-1$

کەواتە لاری لێکەوتەکە m دەکاتە -1 .

ئێستا شێوەی لاری – خاڵ بۆ هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بەکاربهێنە

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-(-2)=-1(x-(-2))$$
$$y=-x-4$$

هاوکێشەی لێکەوتی برگەهاوتای $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-2$ لە خاڵی $P(-2,-2)$ دەکاتە $y=-x-4$.



بۆ دۆزینەوەی هاوکێشەی ئەستوون لەسەر لێکەوتەکە یەکەمجار لارییەکەی دەدۆزینەوە لەبەرئەوەی ئەنجامی لێکدانی لاری لێکەوت و لاری ئەستوون لەسەری دەکاتە -1 و لاری لێکەوتەکە -1کەواتە لاری ئەستوونەکە دەکاتە 1 .

ئێستا شێوەی لاری – خاڵ بۆ هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بەکاربهێنە.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-(-2)=1(x-(-2))$$
$$y=x$$

هاوکێشەی ئەستوون لەسەر لێکەوتەکە لە خاڵی $P(-2,-2)$ دەکاتە $y=x$

هەوڵبدە هاوکێشەی لێکەوت و ئەستوون لە سەری لە خاڵێك کە پۆوتانی یەکەمی دەکاتە $x=-2$ بۆ چەماوەی برگە هاوتای $f(x)=x^2+x-1$ بدۆزەوە.

کاتێ تەنێك لەسەر ڕێڕەوێکی ڕاست دەجووڵێت ئەوا نەخشەی $s=f(t)$ کە شوێنەکەی دیاری دەکات لەهەر کاتێکی وەك t پێی دەوترێت **نەخشەی شوێن**.

داتاشراوی یەکەمی ئەو نەخشەیە بریتییە لە خێرایی تەنەکە لە هەر کاتێکی t دابێت، بەڵام داتاشراوی دووەمی نەخشەکە بریتییە لە تاودانی تەنەکە واتە تاودان زیادکردن یان کەمکردنی خێرایی تەنەکە دەگەیەنێت. سادەترین جووڵە جووڵەی تەنێکە لەسەر هێڵێکی ڕاست بە خێرایەکی نەگۆڕ کە ناگۆڕێت بە گۆڕانی کات. نەخشەی شوێن بۆ ئەو تەنە دەکاتە نەخشەیەکی هێڵی بە شێوەی $s(t)=vt+s_0$ کە s_0 دەکاتە بەهای ئەو نەخشەیە کاتێ $t=0$ واتە دەکاتە شوێنی تەنەکە لەکاتی دەرچوونیدا.

لەلایەکی تر داتاشراوی ئەو نەخشەیە $s'(t)=v$ دەکاتە خێرایی ئەو تەنە . ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە ئەو خێراییەی پێ دەروات نەگۆڕە. تاودانی جووڵەی ئەو تەنە بریتییە لە داتاشراوی دووەمی نەخشەی شوێن واتە. $s''(t)=(v)'=0$ ئەمەش هەر ئەوە دەگەیەنێت کە خێرایی تەنەکە ناگۆڕێت ئەوەش پێشبینی دەکرا چونکە خێرایی تەنەکە نەگۆڕە.

ئەندازیارەکان دوو وشەی «خێرایی» و «تاودان» بۆ دەربڕینی داتاشراوی یەکەم و داتاشراوی دووەمی نەخشەکان بەکاردێنن کە باسی جووڵەی تەنێك بکات. هەروەها ئابووری ناسەکانیش دەستەواژەی تایبەتیان هەیە لەم بوارەدا. ئەوان دەستەواژەی «پەراوێزی» (هامیشی) بەکاردێنن. ئابووری ناسەکان ژمارەیەك نەخشە دەخوێنن وەك نەخشەی تێچوون $C(x)$ ، نەخشەیەکە بەپێی ژمارەی یەکەکانی بەرهەمهێنراو x

پەراوێزی تێچوون ئەو تێچوونە زیادەیەی کە دەردەچێت لە ئەنجامی بەرهەمهێنانی یەکەیەکی زیاتر. ئابووری ناسەکان داتاشراوی نەخشەی تێچوون دادەنێن بە نرخی نزیککراوەیی گونجاو بۆ (پەراوێزی تێچوون).

و ئەو داتاشراوە بەکاردێنن وەك پێناسەی بیرکاریانەی پەراوێزی تێچوون.

نموونە 3 پەراوێزی تێچوون و پەراوێزی داهات

وا دابنێ $C(x)=x^3-6x^2+15x+100$ نەخشەی تێچوونە (بەهەزاران دینار) بۆ بەرهەمهێنانی x ساردکەرەوەی (برّاد) بچووك، کاتی ئاستی بەرهەمهێنان دەکەوێتە نێوان 8 تا 30 ساردکەرەوە. و نەخشەی $R(x)=x^3-3x^2+12x$ نەخشەی دەستکەوت بێت (بە هەزاران دینار) لە ئەنجامی فرۆشتنی x ساردکەرەوە. تێچوونی بەرهەمهێنانی ساردکەرەوەیەکی زیاتر چەندە ئەگەر ئاستی بەرهەم 10 ساردکەرەوە بێت لە ڕۆژێکدا. و چەند داهات زیاد دەکات لەکاتی فرۆشتنی 11 «ساردکەرەوە» لە ڕۆژێکدا.

شیکار

تێچوونی زیاتر بۆ بەرهەمهێنانی ساردکەرەوەی زیاتر لە ئاستی بەرهەمهێنانی 10 ساردکەرەوە ڕۆژانە، دەکاتە نرخی داتاشراوی نەخشەی تێچوون کاتێ $x=10$

$$C'(x)=\left(x^3\right)'-\left(6x^2\right)'+(15x)'+(100)'=3x^2-12x+15$$

$$C'(10)=3(10)^2-12(10)+15=300-120+15=195$$

تێچوونی زیاتری بەرهەمهێنانی ساردکەرەوەی زیاتر لە ئاستی بەرهەمهێنانی 10 ساردکەرەوە لە ڕۆژێکدا دەکاتە 195 هەزار دینار

داهاتی زیاتر بۆ بەرهەمهێنان لە فرۆشتنی 11 ساردکەرەوە لە جیاتی 10 ساردکەرەوە بریتییە لە پەراوێزی داهات کە دەکاتە بەهای داتاشراوی نەخشەی دەستکەوت کاتێ $x=10$

$$R'(x)=\left(x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+(12x)'=3x^2-6x+12$$

$$R'(10)=3(10)^2-6(10)+12=252$$

داهاتی زیاتر لە فرۆشتنی ساردکەرەوەی زیاتر لە ئاستی بەرهەمهێنانی 10 ساردکەرەوە لە ڕۆژێکدا دەکاتە 252 هەزار دینار

هەوڵبدە وا دابنێ کە نەخشەی $C(x)=2x^3-3x^2+5x+160$ دەکاتە نەخشەی تێچوون (بەهەزاران دینار) بەرهەمهێنانی x تەختی نوستن کاتێ ئاستی بەرهەمهێنان لە نێوان 7 تا 20 تەختی نووستندا بێت و نەخشەی $R(x)=2x^3-3x^2+12x$ نەخشەی دەستکەوتی (بەهەزاران دینار)ی فرۆشتنی x تەختی نووستن بێت.
تێچوونی بەرهەمهێنانی تەختەیەکی نووستنی زیاتر لە ئاستی بەرهەمهێنانی 10 تەخت لە ڕۆژێکدا چەندە؟ و چەند داهات زیاد دەکات کاتێ 11 تەختی نووستن لە ڕۆژێکدا بفرۆشرێت.

ڕاهێــــــنـــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چی وای لە ئابووری ناسەکان کردووە کە داتاشراوی یەکەمی نەخشەی تێچوون بە نزیککراوەیی بە گونجاو دابنێن بۆ هەژمارکردنی پەراوێزی تێچوون.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

2 لاری لێکەوتی چەماوەی نەخشەی $f(x)=x^3+3x-1$ لەو خاڵەی کە پۆوتانی یەکەمی $x=1$ بدۆزەوە.

3 نەخشەی شوێنی تەنێك کە لەسەر هێڵێکی ڕاست دەجووڵێت بریتییە لە $s(t)=t^4-3t^2+2$ شوێنی تەنەکەو خێرایی و تاودانی بدۆزەرەوە دوای 7 چرکە لەسەرەتای دەرچوونییەوە.

4 پەراوێزی تێچوون بۆ نەخشەی تێچوونی $C(x)=x^3-2x^2+3x+50$ لە ئاستی بەرهەمهێنان $x=8$ چەندە؟

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

5 لاری لێکەوتی چەماوەی نەخشەی $f(x)=\sqrt{x^2+2}$ لەو خاڵەی کە پۆوتانی یەکەمی $x=2$ بدۆزەوە.

6 پۆوتانی یەکەمی ئەو خاڵە بدۆزەوە کە دەکەوێتە سەر چەماوەی نەخشەی $f(x)=x^4+2$ کاتێ لاری لێکەوتەکەی لەو خاڵەدا بکاتە سفر.

7 هاوکێشەی لێکەوتی چەماوەی نەخشەی $f(x)=(x+1)^3+2$ لەو خاڵەی کە پۆوتانی یەکەمی $x=-1$ بدۆزەوە.

8 هاوکێشەی لێکەوت و ئەستوون لەسەر لێکەوتی چەماوەی نەخشەی $f(x)=2\left(x^2-3x+1\right)$ لەو خاڵەی کە پۆوتانی یەکەمی $x=3$ بدۆزەوە

9 هاوکێشەی لێکەوت و ئەستوون لەسەر لێکەوت بۆ چەماوەی نەخشەی $f(x)=x^4$ لە خاڵی $(-1, 1)$ بدۆزەوە.

10 وا دابنێ کە نەخشەی تێچوون بە هەزاران دینار بۆ بەرهەمهێنانی ئامێری جل شوشتن بریتییەلە.

$$C(x)=2000+100x-0.1x^2$$

أ ئەگەر 100 ئامێری جل شوشتن (شۆرین) بەرهەم بهێنرێت ئایا ناوەندی تێچوونی بەرهەمهێنانی یەك ئامێر چەندە؟

ب پەراوێزی تێچوون لە ئاستی بەرهەمهێنانی 100 ئامێردا چەندە؟

ج تێچوونی بەرهەمهێنانی 101 ئامێر هەژمار بکە و تێچوونی بەرهەمهێنانی 100 ئامێر هەژمار بکە ئینجا تێچوونی بەرهەمهێنانی یەك ئامێری زیاتر دەرئەنجام بکە و بەراوردی ئەوەی پێی گەیشتویی لەگەڵ پەراوێزە تێچوونەکەدا بکە. ئایا بەکارهێنانی داتاشراو بۆ هەژمارکردنی بەهای نزیککراوەی پەراوێزی تێچوون کارێکی گونجاوە؟

11 وا دابنێ كە نەخشەی دەستكەوت داهات بە هەزاران دینار بۆ فرۆشتنی ئامێری جل شوشتن دەكاتە

$$R(x) = 20\,000\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

أ ئەگەر 100ئامێر بفرۆشرێت ئایا ناوەندی دەستكەوت لە فرۆشتن چەندە؟

ب پەراوێزی دەستكەوت لە ئاستی بەرهەمهێنانی 100 ئامێردا بدۆزەوە.

ج داهاتی فرۆشتنی101 ئامێر و داهاتی فرۆشتنی 100 ئامێر بدۆزەوە ئینجا فرۆشتنی یەك ئامێری زیاتر دەرئەنجام بكە بەراوردی ئەوەی پێیگەیشتووی لەگەڵ پەراوێزی دەستكەوتدا بكە. ئایا بەكارهێنانی داتاشراو بۆ هەژماركردنی بەهای نزیككراوەی پەراوێزی دەستكەوت كارێكی گونجاوە.

ڕوانین بۆ دواوە

12 پۆوتانی ئەو خاڵانە بدۆزەوە كە دەكەونە سەرچەماوەی نەخشەی $f(x) = x^3 - 3x + 2$ كاتێ لاری لەو خاڵانەدا بكاتە سفر.

هاوكێشەی لێكەوتی چەماوە لە هەر خاڵێك لەم خاڵانەدا بدۆزەوە

ڕوانین بۆ پێشەوە

13 چی دەڵێیت دەربارەی نەخشەیەك داتاشراوەكەی نەخشەیەكی نەگۆڕە؟